Interrogation 13 d'entrainement
Ensembles et applications

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Donner 5 caractérisations de l'inversibilité d'une matrice (cf Théorème V.1 chap12)
   1.2 Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
   1.3 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
   1.4 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).
   1.5 Définir une relation d'équivalence en définissant chacune des propriétés en question.
2. **Donner un ensemble image ou réciproque.** Sans justification ou démonstration, donner dans chaque exemple l'ensemble image ou réciproque demandé.

   2.1 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f([-3\,;4])$?

   2.2 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f^{-1}([-3\,;4])$?

   2.3 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array}$, $f(\mathscr{A}_2(\mathbb{R}))$?

   2.4 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array}$, $f^{-1}(\{1\})$?

   2.5 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z+\overline{z} \end{array}$, $f(\mathbb{U})$?

   2.6 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z+\overline{z} \end{array}$, $f^{-1}(]-4\,;+\infty[)$?

   2.7 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM+M \end{array}$, $f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$?

   2.8 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM+M \end{array}$, $f^{-1}(\{0_n\})$?

   2.9 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, $f\left(\left[\frac{\pi}{2}\,;4\pi\right]\right)$?

   2.10 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, $f^{-1}\left(\left[0\,;\frac{1}{2}\right]\right)$?

   2.11 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$, $f([-3\,;2]\times[-2\,;3])$?

   2.12 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$, $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\})$?

   2.13 Pour $f : \begin{array}{rcl} \operatorname{Vect}(\cos,\sin) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array}$, $f(\operatorname{Vect}(\cos,\sin))$?

   2.14 Pour $f : \begin{array}{rcl} \operatorname{Vect}(\cos,\sin) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array}$, $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\})$?

   2.15 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array}$, $f(\mathbb{R})$?

   2.16 Pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{array}$, $f^{-1}\left(\left\{e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right)$?

   2.17 Pour $E=\{1,2,3\}$, $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & A\cap\{1\} \end{array}$, $f(\mathscr{P}(E))$?

   2.18 Pour $E=\{1,2,3\}$, $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & A\cap\{1\} \end{array}$, $f^{-1}(\{\{1\}\})$?
3. **Manipuler les ensembles.**
   3.1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $A\subset B \Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$.
   3.2 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $A\subset B \Rightarrow f(A)\subset f(B)$.
   3.3 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.
   3.4 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
   3.5 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.
   3.6 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
   3.7 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $A\in\mathscr{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}(C_F(A))=C_E(f^{-1}(A))$.

4. **Manipuler les injections - surjections.**
   4.1 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. Montrer que $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
   4.2 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(F,G)$ injective. Montrer que pour tout $(g,h) \in \mathscr{F}(E,F)$, on a $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.
   4.3 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ injective. Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   4.4 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ surjective. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(F)$, $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$.
   4.5 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injectif alors f est surjective.
5. **Calculer l'inverse d'une matrice.**
   5.1 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.
   5.2 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.
   5.3 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.
   5.4 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.
   5.5 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.