Correction de l'interrogation 13 d'entrainement
Ensembles et applications

1. **Restituer le cours.**

 1.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

 i. A est inversible

 ii. $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_n$

 iii. $\operatorname{rg}(A) = n$

 iv. $\forall X \in \mathbb{K}^n,\ AX = 0_{\mathbb{K}^n} \ \Rightarrow\ X = 0_{\mathbb{K}^n}$.

 v. $\forall B \in \mathbb{K}^n$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ admet une unique solution.

 vi. $\forall B \in \mathbb{K}^n$, l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ admet au moins une solution.

 1.2 Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,

 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

 1.3 Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

 1.4 Soient E, F et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

 De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

 1.5 Soit E un ensemble et $\sim$ une relation sur E. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est

 i. réflexive : $\forall x \in E,\ x \sim x$,

 ii. symétrique : $\forall (x, y) \in E^2$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$,

 iii. transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3$, si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$.

2. **Donner un ensemble image ou réciproque.**

 2.1 $f([-3\,;\,4]) = [0\,,\,16]$.

 2.2 $f^{-1}([-3\,;\,4]) = [-2\,,\,2]$.

 2.3 $f(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = \{0_\mathbb{R}\}$.

 Explication : On sait que si M est antisymétrique alors ses coefficients diagonaux sont nuls. Donc la somme de ses coefficients diagonaux i.e. sa trace est aussi nulle. Attention ne mettez pas juste 0 mais bien l'ensemble contenant 0.

 2.4 $f^{-1}(\{1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

 Explication : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\{1\}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) \in \{1\} \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}(M) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a + d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d = 1 - a. \end{aligned}$$

2.5 $f(\mathbb{U}) = [-2\,;\,2]$
Explication : On sait que $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique tandis que $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Faites un dessin : quand z parcourt le cercle $\mathrm{Re}(z)$ décrit $[-1\,;\,1]$ et donc $2\mathrm{Re}(z)$ parcourt $[-2\,;\,2]$. Formellement : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in f(\mathbb{U}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{U},\ x = f(z) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = 2\cos(\theta) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ \frac{x}{2} = \cos(\theta) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in [-1\,;\,1]. \end{aligned}$$

2.6 $f^{-1}(]-4\,;\,+\infty[) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in]-2\,;\,+\infty[\}$.
Explication : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(]-4\,;\,+\infty[) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) \in]-4\,;\,+\infty[\quad & \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}(z) \in]-4\,;\,+\infty[\\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) \in]-2\,;\,+\infty[\end{aligned}$$

2.7 $f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Explication : Soit $M \in f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$. Alors il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = f(N)$ i.e. $M = {}^tN + N$. Alors ${}^tM = {}^t\left({}^tN + N\right) = {}^t\left({}^tN\right) + {}^tN = N + {}^tN = M$. Donc $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, en posant $N = \frac{M}{2}$, on observe que $f(N) = {}^tN + N = \frac{{}^tM}{2} + \frac{M}{2} = \frac{M}{2} + \frac{M}{2}$ car $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et donc $f(N) = M$. Donc M admet un antécédent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $M \in f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subseteq f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.
Conclusion, $f(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

2.8 $f^{-1}(\{0_n\}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
Explication : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\{0_n\}) \quad \Leftrightarrow \quad f(M) = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad {}^tM + M = 0_n \quad & \Leftrightarrow \quad {}^tM = -M \\ & \Leftrightarrow \quad M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

2.9 $f\left(\left[\frac{\pi}{2}\,;\,4\pi\right]\right) = [-1\,;\,1]$.

2.10 $f^{-1}\left(\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]\right)$.

2.11 $f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) = [-9\,;\,6]$.
Explication : Pour tout $(x, y) \in [-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]$, on a $-3 \leqslant x \leqslant 2$. Si $y \in [-2\,;\,0]$, alors $2y \leqslant xy \leqslant -3y$. Or $y \geqslant -2 \Rightarrow 2y \geqslant -4$ et $y \geqslant -2 \Rightarrow -3y \leqslant 6$. Donc $-4 \leqslant 2y \leqslant xy \leqslant -3y \leqslant 6$.
Second cas, $y \in [0\,;\,3]$, alors $-9 \leqslant -3y \leqslant xy \leqslant 2y \leqslant 6$.
Dans tous les cas, $xy \in [-9\,;\,6]$. Donc $f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) \subseteq [-9\,;\,6]$.
Réciproquement, si $z \in [-9\,;\,6]$. Alors en posant $x = 3$ et $y = \frac{z}{3} \in [-3\,;\,2]$, on a bien $(x, y) \in [-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]$ et $z = 3 \times \frac{z}{3} = xy$. Donc $z \in f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3])$. Ainsi, $[-9\,;\,6] \subseteq f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3])$.
Conclusion, $f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) = [-9\,;\,6]$.

2.12 $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) = (\{0_{\mathbb{R}}\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\})$, c'est l'union des axes des abscisses avec l'axe des ordonnées.

2.13 $f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) = \mathbb{R}$.
Explication : Il est clair que $f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) \subseteq \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $g = \lambda\cos = \lambda\cos + 0 \times \sin \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. De plus $f(g) = g(0) = \lambda\cos(0) = \lambda$ (attention ce n'est pas $f \circ g$ mais f évaluer en g, f est une application qui mange des fonctions). Donc g est un antécédent de λ par f dans $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ donc $\lambda \in f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin))$. Ainsi $\mathbb{R} \subseteq f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin))$. Conclusion, $f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) = \mathbb{R}$.

2.14 $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) = \mathrm{Vect}(\sin)$.
Explication : Soit $g = \lambda\cos + \mu\sin \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g \in f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) \quad \Leftrightarrow \quad f(g) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad g(0) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \lambda\cos(0) + \mu\sin(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad g = \mu\sin \in \mathrm{Vect}(\sin). \end{aligned}$$

2.15 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Explication : Si $z \in \mathbb{R}$ alors $f(z) = z^5 \in \mathbb{R}$ donc $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Réciproquement si $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto x^4$ strictement positive sauf en un point $x = 0$) et continue et tendant vers $-\infty$ en $x \to -\infty$ et $+\infty$ en $x \to +\infty$, on en déduit du théorème de la bijection que $x \mapsto x^5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe (un unique) $z \in \mathbb{R}$ tel que $z^5 = x$. Donc $x \in f(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$. Conclusion, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2.16 $f^{-1}\left(\left\{e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right) = \left\{e^{i\frac{2\pi}{15}+i\frac{2k\pi}{5}} \,\middle|\, k \in [\![0\,;4]\!]\right\}$.
Explication : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$z \in f^{-1}\left(\left\{e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z^5 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ est une racine 5ième de } e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2.17 $f(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Explication : Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Deux cas possibles, si $1 \in A$ alors $f(A) = A \cap \{1\} = \{1\}$. Si $1 \notin A$ alors $f(A) = A \cap \{1\} = \emptyset$. Donc $f(\mathscr{P}(E)) \subseteq \{\emptyset, \{1\}\}$. Réciproquement, $\emptyset = f(\emptyset)$ donc $\emptyset \in f(\mathscr{P}(E))$ et $\{1\} = f(\{1\})$ donc $\{1\} \in f(\mathscr{P}(E))$. Ainsi, $\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq f(\mathscr{P}(E))$. Conclusion, $f(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

2.18 $f^{-1}(\{1\}) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, E\}$.
Explication : Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in f^{-1}(\{1\}) \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \{1\} = \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in A.$$

3. **Manipuler les ensembles.**

3.1 Supposons que $A \subseteq B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition, $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$. Donc $f(x) \in B$, i.e. $x \in f^{-1}(B)$. On a donc démontré que tout élément de $f^{-1}(A)$ est un élément de $f^{-1}(B)$ et donc $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Conclusion

$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).}$$

3.2 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \subseteq B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. On a alors par définition qu'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subseteq B$. Donc $x \in B$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(B)$. Donc tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(B)$. Donc $f(A) \subseteq f(B)$. Conclusion,

$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad f(A) \subset f(B).}$$

3.3 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cup B \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ OU } f(x) \in B \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ OU } x \in f^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).}$$

3.4 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).}$$

3.5 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).}$$

3.6 Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$. Soit $y \in f(A\cap B)$. Par définition, il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in A\cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Donc y est l'image d'un élément de A (l'élément x) et y est l'image d'un élément de B (le même, l'élément x). Par conséquent, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A)\cap f(B)$. Finalement, on a montré que

$$\boxed{f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B).}$$

3.7 Soit $A \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A))$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C_F(A)) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in C_F(A) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin A \quad \Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in C_E\left(f^{-1}(A)\right). \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A)).}$$

4. **Manipuler les injections - surjections.**

4.1 Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On suppose que $g\circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $y \in G$. Puisque $g\circ f \in \mathscr{F}(E,G)$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = g\circ f(x)$. Ainsi, en posant $z = f(x) \in F$, on observe que $y = g(f(x)) = g(z)$. Donc y possède un antécédente dans F. Ceci étant vrai pour tout $y \in G$ on en déduit que g est surjective. Conclusion,

$$\boxed{g\circ f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective.}}$$

4.2 Soit $f \in \mathscr{F}(F,G)$ injective. Soit $(g,h) \in \mathscr{F}(E,F)^2$ tel que $f\circ g = f\circ h$. Montrons que $g = h$. Soit $x \in E$. Par hypothèse, $f\circ g(x) = f\circ h(x)$ i.e. $f(g(x)) = f(h(x))$. Posons $y = g(x)$ et $y' = h(x)$. Alors $f(y) = f(y')$. Or la fonction f est injective donc $y = y'$ i.e. $g(x) = h(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $g = h$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (g,h) \in \mathscr{F}(E,F)^2, \qquad f\circ g = f\circ h \quad \Rightarrow \quad g = h.}$$

4.3 Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ injective. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. On sait déjà (cf question 3.6) que , $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in f(A)\cap f(B)$. Alors

$$\begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists x_1 \in A,\ y = f(x_1) \\ \exists x_2 \in B,\ y = f(x_1). \end{cases}$$

En particulier $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective donc les antécédents de y sont égaux $x_1 = x_2$. Notons x cet antécédent commun. On a $x = x_1 \in A$ et $x = x_2 \in B$. Donc $x \in A\cap B$. Or $y = f(x)$. Donc y possède un antécédent par f dans $A\cap B$. Donc $y \in f(A\cap B)$. Ainsi, $f(A)\cap f(B) \subseteq f(A\cap B)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad f(A\cap B) = f(A)\cap f(B).}$$

4.4 Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ surjective. Soit $A \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$. Soit $y \in \overline{f(A)}$. Alors $y \notin f(A)$. Donc pour tout $x \in A$, on a $y \neq f(x)$ i.e. y n'admet aucun antécédent dans A. Or f est surjective, on sait donc que y admet malgré tout un antécédent : il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$. Puisque $y \notin f(A)$, on en déduit que $x_0 \notin A$. Donc $x_0 \in \overline{A}$ et puisque $y = f(x_0)$, on a $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Ainsi, $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right).}$$

4.5 Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On suppose que $g\circ f$ est surjective et que g est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Posons $z = g(y)$. Puisque $g\circ f$ est surjective alors on sait que z admet un antécédent par $g\circ f$: il existe $x \in E$ tel que $z = g\circ f(x)$. Dès lors, $g(y) = z = g(f(x))$. Or g est injective. Donc $y = f(x)$. Autrement dit x est un antécédent de y par f. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

5. **Calculer l'inverse d'une matrice.**

5.1 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} & & I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

5.2 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{ll}
P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2.
\end{array}
$$

La dernière matrice est échelonnée avec deux pivots. Donc $\mathrm{rg}\,(P) = 2 \neq 3$. Donc $\boxed{P \text{ n'est pas inversible}}$.

5.3 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} & & I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

5.4 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & & I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

5.5 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & & I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$