



Correction de l'interrogation 19 d'entraînement Espaces Vectoriels

1. Restituer le cours.

1.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel si et seulement si (par définition) :

- $F \subseteq E$
- F est un espace vectoriel.

si et seulement si (par caractérisation) :

- $F \subseteq E$
- $0_E \in F$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

1.2 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}.$$

1.3 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2, \forall (y, y') \in G^2, \quad (x + y = x' + y') \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

1.4 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si (par définition)

$$\forall z \in E, \exists! (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

si et seulement si (par caractérisation) :

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $F + G = E$.

1.5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, a_0, \dots, a_n les coefficients de P et x_1, \dots, x_n les racines de P (éventuellement confondues). Alors

$$1. \quad x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad 2. \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

1.6 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Comment je ne l'ai pas défini dans le cours? C'est quoi un espace préhilbertien? C'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est quoi un produit scalaire? C'est une forme bilinéaire définie positive et symétrique. C'est quoi une forme bili... Ok si je vous dit que \mathbb{R}^3 est un espace de Hilbert, ça vous va? D'ailleurs, vous ne saviez pas que \mathbb{R}^3 était à Hilbert? Vous devriez alors en sortir vite fait avant qu'il ne se fâche...

Révisions

1.6 La fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ est continue sur \mathbb{R} et $3 \in \mathbb{R}$. Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F : x \mapsto 4 + \int_3^x e^{t^2} dt,$$

est l'unique primitive de f vérifiant $F(3) = 4$. Puisque f est continue sur \mathbb{R} , on sait également que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .



1.7 La fonction $x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (et même prolongeable par continuité en 0) et $2 \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F : x \mapsto 1 + \int_2^x e^{t \ln(t)} dt,$$

est l'unique primitive de f vérifiant $F(2) = 1$. Puisque f est continue sur \mathbb{R}_+^* , on sait également que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

1.8 Posons

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \\ v(x) = x \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(2x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}.$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx = \left[x \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 0 - \left[-\frac{\cos(2x)}{4} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi - 2}{8}}.$$

1.9 Posons

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ v(x) = \cos(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u'(x) = e^{2x} \\ v'(x) = -\sin(x) \end{cases}.$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \cos(x) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2x}}{2} \sin(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2x}}{2} \sin(x) dx. \end{aligned}$$

A nouveau, posons

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{e^{2x}}{4} \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}.$$

Alors, par une seconde intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4} \sin(x) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2x}}{4} \cos(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{4}I. \end{aligned}$$



Par suite

$$\frac{5}{4}I = \frac{e^\pi - 2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi - 2}{5}.$$

Conclusion,

$$I = \frac{e^\pi - 2}{5}.$$

1.10 Posons pour tout $t \in [0; 1]$, $s = e^t$ i.e. $t = \ln(s)$. Alors $dt = \frac{1}{s} ds$. Par conséquent,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt = \int_1^e \frac{1}{s + 1} \frac{1}{s} ds.$$

On observe que pour tout $s \in [1; e]$, on a $\frac{1}{(s+1)s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$. Donc

$$I = \int_1^e \frac{1}{s} ds - \frac{1}{s+1} ds = \ln(e) - 0 - (\ln(1+e) - \ln(2)) = 1 + \ln(2) - \ln(1+e).$$

Conclusion,

$$I = 1 + \ln(2) - \ln(1+e).$$

1.11 Pour tout $t \in [1; e]$, posons $u = \ln(t)$ i.e. $t = e^u$. Alors, $dt = e^u du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{e^u \sqrt{u+1}} e^u du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}} du \\ &= \left[2\sqrt{u+1} \right]_{u=0}^{u=1} \\ &= 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$I = 2(\sqrt{2} - 1).$$

2. Reconnaître un espace vectoriel.

2.1 $[-1; 1]$ n'est pas un espace vectoriel.

Explication : Le vecteur $x = 1 \in E$ cependant en le multipliant par le scalaire 2, on obtient $2x = 2 \notin E$. Donc E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion, E n'est pas un espace vectoriel.

2.2 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Explication : On pose $u = (1, -1)$. On observe que $1^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$. Donc $u \in E$. Cependant $v = -u = (-1, 1)$ vérifie $(-1)^2 + 1^3 = 1 + 1 = 2 \neq 0$. Donc $-u \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion, E n'est pas un espace vectoriel.

2.3 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ est un espace vectoriel.

Explication : La somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si les deux réels sont nuls. Donc $E = \{(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ qui est bien un espace vectoriel.

2.4 $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ majorée par } 1\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Explication : Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$. Alors la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien majorée par 1 et donc $u \in E$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2u_n$, alors la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = 2u$ n'est pas majorée par 1. Donc $2u \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion, E n'est pas un espace vectoriel.

2.5 $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$ est un espace vectoriel.

Explication : Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $E \subseteq \mathbb{R}[X]$ par définition.
- $0_{\mathbb{R}[X]} = (X^2 + 1) 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $X^2 + 1$ divise $0_{\mathbb{R}[X]}$ et $0_{\mathbb{R}[X]} \in E$.

- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in E$, $X^2 + 1$ divise P : il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2 + 1)P_1$. De même $Q \in E$ donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X^2 + 1)Q_1$. Ainsi,

$$R = \lambda P + \mu Q = \lambda (X^2 + 1)P_1 + \mu (X^2 + 1)Q_1 = (\lambda P_1 + \mu Q_1)(X^2 + 1)$$

Donc $X^2 + 1$ divise R et donc $\lambda P + \mu Q = R \in E$, E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- 2.6 $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid X^3 P^{(3)} = P(X^2 + 1)\}$ est un espace vectoriel.

Explication : Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- $E \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Posons $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $X^3 P^{(3)} = X^3 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]} = P(X^2 + 1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in E$, $X^3 P^{(3)} = P(X^2 + 1)$. De même $Q \in E$ donc $X^3 Q^{(3)} = Q(X^2 + 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} X^3 R^{(3)} &= X^3 (\lambda P^{(3)} + \mu Q^{(3)}) && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda X^3 P^{(3)} + \mu X^3 Q^{(3)} \\ &= \lambda P(X^2 + 1) + \mu Q(X^2 + 1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E \\ &= (\lambda P + \mu Q)(X^2 + 1) \\ &= R(X^2 + 1). \end{aligned}$$

Donc $R = \lambda P + \mu Q \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- 2.7 $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = f(1) - 1 \right\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Explication : En effet, la fonction nulle n'appartient pas à E . Posons $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. Alors $\int_0^1 f(t) dt = 0_{\mathbb{R}} \neq -1 = f(1) - 1$. Donc E n'est pas un espace vectoriel.

- 2.8 $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$ est un espace vectoriel.

Explication : Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M = 0_n$, alors $MN = 0_n N = 0_n = N 0_n = NM$. Donc $0_n \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M_1, M_2) \in E^2$. Posons $M = \lambda M_1 + \mu M_2$. Alors,

$$\begin{aligned} MN &= (\lambda M_1 + \mu M_2)N = \lambda M_1 N + \mu M_2 N = \lambda N M_1 + \mu N M_2 && \text{car } M_1 \in E \text{ et } M_2 \in E \\ &= N(\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= NM. \end{aligned}$$

Donc $M = \lambda M_1 + \mu M_2 \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 2.9 $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, f \text{ est } k\text{-périodique}\}$ est un espace vectoriel.

Explication : Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est 1-périodique, 2-périodique et même k -périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Puisque $f \in E$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que f est k_1 -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + k_1) = f(x).$$

De même $g \in E$, donc il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que g est k_2 -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x + k_2) = f(x).$$

Puisque g est k_2 périodique, alors g est $2k_2$ -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x + 2k_2) = g((x + k_2) + k_2) = g(x + k_2) = g(x).$$

Puis de même g est $3k_2$ -périodique et par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g est pk_2 -périodique. Notamment g est k_1k_2 -périodique.

De même, f est pk_1 -périodique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc f est k_1k_2 -périodique.

Posons maintenant $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que h est k_1k_2 -périodique. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x + k_1k_2) &= \lambda f(x + k_1k_2) + \mu g(x + k_1k_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont } k_1k_2\text{-périodiques.} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Donc h est k -périodique avec $k = k_1k_2 \in \mathbb{N}^*$. Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.10 $E = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + nu_n \}$ est un espace vectoriel.

Explication : Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$. Alors $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 0_{\mathbb{R}} = 3 \times 0 + n \times 0 = 3u_{n+1} + nu_n$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Notons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} + nu_n) + \mu(3v_{n+1} + nv_n) \quad \text{car } u \in E \text{ et } v \in E \\ &= 3(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + n(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 3w_{n+1} + nw_n. \end{aligned}$$

Donc $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démontrer si E est un espace vectoriel ou non.

2.11 Montrons que $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$. Donc $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Posons $w = \lambda u + \mu v$ et notons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque $u \in E$ et $v \in E$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda u_n + \mu v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \lambda o(n) + \mu o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

Donc $w = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.12 Montrons que $E = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ lipschitzienne} \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est bien k -lipschitzienne pour tout $k \in \mathbb{R}_+$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq k|x - y|.$$

Donc $0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$.



- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que $h \in E$. Puisque $f \in E$, alors f est lipschitzienne i.e. il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq a |x - y|.$$

De même $g \in E$ est lipschitzienne, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq b |x - y|.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(x) - h(y)| &= |\lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda f(y) + \mu g(y))| \\ &= |\lambda (f(x) - f(y)) + \mu (g(x) - g(y))| \\ &\leq |\lambda (f(x) - f(y))| + |\mu (g(x) - g(y))| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= |\lambda| |f(x) - f(y)| + |\mu| |g(x) - g(y)| \\ &\leq |\lambda| a |x - y| + |\mu| b |x - y| && \begin{array}{l} f \text{ est } a\text{-lipschitzienne} \\ g \text{ est } b\text{-lipschitzienne} \end{array} \\ &= (|\lambda| a + |\mu| b) |x - y|. \end{aligned}$$

Posons $c = |\lambda| a + |\mu| b \in \mathbb{R}_+$, alors h est c -lipschitzienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(x) - h(y)| \leq c |x - y|.$$

Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.13 Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de signe constant}\}$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2$. On observe que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de signe constant. Donc $u \in E$ et $v \in E$. Posons $w = u + v$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors la suite $w \notin E$. Donc E n'est pas stable par addition. Conclusion, E n'est pas un espace vectoriel.

2.14 Montrons que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On a $E \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M = 0_n$, alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(0_n) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_n \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in E^2$. Posons $A = \lambda M + \mu N$. Par linéarité de la trace,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \text{tr}(M) + \mu \text{tr}(N) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \quad \text{car } M \in E \text{ et } N \in E.$$

Donc $A = \lambda M + \mu N \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.15 Montrons que $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 2\text{-lipschitzienne}\}$ n'est pas un espace vectoriel. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{matrix}$. Alors f est 2-lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|.$$

Donc $f \in E$. Posons maintenant $g = 2f$. Alors on a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \quad |g(x) - g(y)| = |4x - 4y| = 4|x - y| > 2|x - y| \quad \text{car } |x - y| > 0.$$

Donc g n'est pas 2-lipschitzienne. Ainsi $2f \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion, E n'est pas un espace vectoriel.



2.16 Montrons que $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- On a $E \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Alors $P'' = P' = P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0_{\mathbb{C}}$. Donc $P = 0_{\mathbb{C}[X]} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors, par linéarité de la dérivation, $R' = \lambda P' + \mu Q'$ et $R'' = \lambda P'' + \mu Q''$. Donc

$$\begin{aligned} R''(1) &= \lambda P''(1) + \mu Q''(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = R'(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E \\ &= \lambda P(1) + \mu Q(1) = R(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E. \end{aligned}$$

Ainsi, $R''(1) = R'(1) = R(1)$. Donc $R = \lambda P + \mu Q \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

3. Déterminer une intersection ou une somme d'espaces vectoriels.

3.1 Soient $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P''(1) = 0\}$. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in F \cap G \iff \begin{cases} P \in F \\ P \in G \end{cases} \iff P'(1) = P''(1) = 0.$$

Posons $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^4$ tel que $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Alors $P' = 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$ et $P'' = 6a_3X + 2a_2$. Donc

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\iff \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} 3a_3 - 6a_3 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} a_1 = 3a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &\iff P = a_3(X^3 - 3X^2 + 3X) + a_0 \end{aligned}$$

D'où,

$$F \cap G = \{a_3(X^3 - 3X^2 + 3X) + a_0 \in \mathbb{K}_3[X] \mid (a_3, a_0) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(X^3 - 3X^2 + 3X, 1).$$

3.2 Soient $F = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\iff \begin{cases} M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32} \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32} \\ a_{33} = -a_{11} - a_{22}. \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \\ &\iff M = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

3.3 Soient $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On

a

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda \\ 3\lambda + \mu \\ 4\lambda \end{bmatrix} \\ \lambda + \mu + 2\lambda + 3\lambda + \mu + 4\lambda = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (\lambda + \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu, 4\lambda) \\ 10\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (\lambda + \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu, 4\lambda) \\ \mu = -5\lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda - 5\lambda, 2\lambda, 3\lambda - 5\lambda, 4\lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = \lambda(-4, 2, -2, 4). \end{aligned}$$

D'où,

$$F \cap G = \{ 2\lambda(-2, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

3.4 Soient $F = \{ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = f \}$ et $G = \text{Vect}(\text{ch}, \cos)$. Soit (E) l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants : $f'' - f = 0$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont 1 et -1 . Posons $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$. Donc l'ensemble F des solutions est

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2).$$

Ainsi,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\text{ch}, \cos) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \text{ch}, \cos).$$

Or on observe que $\text{ch} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ et est donc une combinaison linéaire de f_1 et f_2 . Donc

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).$$

Or on ne peut écrire aucun de ces vecteurs comme combinaison linéaire des autres (on dit que la famille (f_1, f_2, \cos) est libre ou encore que ces vecteurs ne sont pas coplanaires). Conclusion,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).$$

3.5 Soient $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$. Soit $(F_c) : r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de F . On remarque que 2 et 3 sont les deux racines de (F_c) . Donc

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

Soit $(G_c) : r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de G . Soit Δ le discriminant associé $\Delta = 1 + 8 = 9$ et donc les racines sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Donc,

$$G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}} \right) + \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \right) \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \right). \end{aligned}$$

On note qu'aucun de ces trois vecteurs ne sont combinaison linéaire des autres vecteurs. Conclusion,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

3.6 Soient $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, b = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_2, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0_2, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_5 - C_6 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 + C_3 \end{array} \end{aligned}$$

car les opérations élémentaires sur les vecteurs ne changent pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$F + G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$



4. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.1 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors $f \in F$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$. Donc $\int_0^1 f(t) dt = C \times (1 - 0) = C$. Or $f \in G$, donc

$$0 = \int_0^1 f(t) dt = C.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C = 0$. D'où, $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et $F \cap G \subseteq \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$. Or on a également $\{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\} \subseteq F \cap G$. Donc

$$F \cap G = \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}.$$

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C + h(x).$$

Puis, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t) dt = C + \int_0^1 h(t) dt = C \quad \text{car } h \in G.$$

Donc $C = \int_0^1 f(t) dt$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - C$.

Synthèse. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $C = \int_0^1 f(t) dt$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = C$. Posons également $h = f - C$. Alors, on a bien

- (i) $f = C + h = g + h$
- (ii) $g \in F$
- (iii) $\int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - C = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0$ par définition de C
donc $h \in G$.

Ainsi, $f \in F + G$. Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq F + G$. Or on a aussi $F + G \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$F + G = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\boxed{F \oplus G = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$$

4.2 Soient $F = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

- Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ et ainsi $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq F \cap G$. D'où

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$



- D'autre part,

$$F + G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 :

$$\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3.}$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ et donc $M = -M$ i.e. $M = 0_n$. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \{0_n\}$. Or on a aussi $\{0_n\} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}.$$

- C'est un exercice que nous avons déjà vu. Ceux qui se souviennent de la décomposition, peuvent passer la partie analyse.

Analyse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$ avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors, par linéarité de la transposée,

$${}^tM = {}^tA + {}^tB = A - B \quad \text{car } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Donc

$$\begin{cases} M = A + B \\ {}^tM = A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{M + {}^tM}{2} \\ B = \frac{M - {}^tM}{2}. \end{cases}$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $B = \frac{M - {}^tM}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad A + B &= \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} = M \\ (ii) \quad {}^tA &= \frac{{}^t(M + {}^tM)}{2} = \frac{{}^tM + M}{2} = A \text{ donc } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ (iii) \quad {}^tB &= \frac{{}^t(M - {}^tM)}{2} = \frac{{}^tM - M}{2} = -B \text{ donc } B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ainsi, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Or on a aussi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Conclusion, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$



4.4 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

- Soit $P \in F \cap G$. Alors $P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0$. Donc 0 est une racine double de P et 1 est aussi une racine double de P . Donc P est un polynôme de degré au plus 3 ($\in \mathbb{R}_3[X]$) ayant 4 racines comptées avec multiplicité. Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Donc $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \subseteq F \cap G$. Donc

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}.$$

- Calculons $F + G$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow 0 \text{ est une racine double de } P \\ &\Leftrightarrow X^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = X^2 Q \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = X^2 (aX + b) = aX^3 + bX^2. \end{aligned}$$

D'où

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2).$$

De même, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\begin{aligned} P \in G &\Leftrightarrow 1 \text{ est une racine double de } P \\ &\Leftrightarrow (X - 1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 1)^2 Q \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X - 1)^2 (aX + b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X^2 - 2X + 1)(aX + b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a(X^3 - 2X^2 + X) + b(X^2 - 2X + 1). \end{aligned}$$

D'où

$$G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X, -2X + 1) \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 + 2C_2 \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X, 1) \quad C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3 \\ &= \{a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X] \mid (a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4\}. \end{aligned}$$

Donc $F + G = \mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].$$

4.5 Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors la fonction f vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f''(x) + 3f'(x) + 7f(x) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

Or on note que $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ vérifie aussi ce même problème de Cauchy. Donc par unicité, $f = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\} \subseteq F \cap G$. Donc,

$$F \cap G = \{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}.$$

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est l'unique solution de $f'' + 3f' + 7f = 0$ vérifiant $g(0) = f(0) - h(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0) - h'(0) = f'(0)$. Puis $h = f - g$.



Synthèse. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $y_0 = f(0)$ et $y_1 = f'(0)$. Alors le système suivant :

$$\begin{cases} g'' + 3g' + 7g = 0 \\ g(0) = y_0 \\ g'(0) = y_1 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy et admet donc une unique solution, que l'on note g . Posons également $h = f - g$. Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad & f = g + h \\ (ii) \quad & g \text{ est solution de } g'' + 3g' + 7g = 0 \text{ donc } g \in F \\ (iii) \quad & \begin{cases} h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - y_0 = f(0) - f(0) = 0 \\ h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - y_1 = f'(0) - f'(0) = 0 \end{cases} \\ & \text{donc } h \in G. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in F + G$. Donc $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq F + G$. Or on a aussi, $F + G \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$F + G = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$F \oplus G = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

5. Déterminer la multiplicité d'une racine.

5.1 Soit $P = 5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$. On a

$$P(1) = 5 - 13 + 12 - 8 + 7 - 3 = 0.$$

Donc 1 est une racine de P . De plus $P' = 25X^4 - 52X^3 + 36X^2 - 16X + 7$. Donc

$$P'(1) = 25 - 52 + 36 - 16 + 7 = -27 + 20 + 7 = 0.$$

Puis, $P'' = 100X^3 - 156X^2 + 72X - 16$. Donc

$$P''(1) = 100 - 156 + 72 - 16 = -56 + 72 - 16 = 0.$$

On continue, $P''' = 300X^2 - 312X + 72$. Donc,

$$P'''(1) = 300 - 312 + 72 = -12 + 72 = 60 \neq 0.$$

Donc $\boxed{1 \text{ est une racine de multiplicité } 3 \text{ de } P}$.

5.2 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. On remarque directement un binôme de Newton : $P = (X + 1)^3$. Donc, directement $\boxed{-1 \text{ est une racine de multiplicité } 3 \text{ de } P}$.

5.3 Posons $P = (X - 2)^2(X^2 - 13X + 22)$. Il est clair que 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P . Posons $Q = X^2 - 13X + 22$. Alors

$$Q(2) = 4 - 26 + 22 = 0.$$

De plus $Q' = 2X - 13$ et donc $Q'(2) = 4 - 13 = -9 \neq 0$. Donc 2 est une racine simple de Q et donc $\boxed{2 \text{ une racine de multiplicité } 3 \text{ de } P}$.

5.4 Soit $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Commençons par rappeler les deux relations fondamentales pour j : le complexe j étant une racine 3-ième de l'unité on a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. Ainsi

$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0.$$

De plus $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$. Donc

$$P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 4 + 6j^2 + 6j + 2 = 6(j^2 + j + 1) = 0.$$

Et encore $P'' = 12X^2 + 12X + 6$ et donc

$$P''(j) = 12j^2 + 12j + 6 = 12(j^2 + j + 1) - 12 + 6 = -6 \neq 0.$$

Donc $P(j) = P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$. Conclusion, $\boxed{j \text{ est une racine double de } P}$.

NB : lorsque l'on sait que j est une racine de multiplicité au moins deux, puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $j^2 = \bar{j}$ est aussi une racine de multiplicité au moins deux de P . Or $\deg(P) = 4 = 2 + 2$. Donc j et j^2 sont deux racines doubles de P .



5.5 Soit $P = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$. On a

$$P(-1) = -1 + 6 - 10 - 20 + 51 - 26 = 0.$$

De plus $P' = 5X^4 + 24X^3 + 30X^2 - 40X - 51$ et

$$P'(-1) = 5 - 24 + 30 + 40 - 51 = 5 + 6 - 11 = 0.$$

De surcroît $P'' = 20X^3 + 72X^2 + 60X - 40$ et donc

$$P''(-1) = -20 + 72 - 60 - 40 = 52 - 100 = -48 \neq 0.$$

Donc $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) \neq 0$. Conclusion, $\boxed{-1 \text{ est une racine double de } P}$.