Correction de l'interrogation 20 d'entrainement
Familles de vecteurs

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est libre si et seulement si

- Aucun des vecteurs de $\mathscr{L}$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

1.2 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

1.3 Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathscr{G}$ une famille de vecteur de E. On dit que $\mathscr{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$.

1.4 Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si

- $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E
- i.e.

$$\forall x \in E,\ \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

1.5 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,

- $F \cap G = \{0_E\} \iff \mathscr{B}$ est libre.
- $F + G = E \iff \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
- $F \oplus G = E \iff \mathscr{B}$ est une base de E.

1.6 Il suffit (ou plutôt « il faut » cela ressemble plus à une condition nécessaire que suffisante...) de demander à la fille ou au garçon si elle/il est libre, surtout si elle/il est canon. C'est la base. Pour engendrer faut peut-être attendre un peu...

Révisions

1.7 On a

$$\boxed{\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o\left(u^5\right).}$$

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2 \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x^2 \ln\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}.$$

Posons $u(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, $o\left(u(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o\left(u\right)$. Donc

$$\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{x^2\left(-\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\frac{1}{6} + o(1)}$$

Puisque $-\frac{1}{6} + o\left(1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$, alors par continuité de l'exponentielle en $-1/6$, on conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.}$$

1.8 On a

$$\boxed{\operatorname{ch}(u) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+o\left(u^5\right).}$$

De plus $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right),$$

Puis,

$$u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right).$$

Enfin $o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\sin(x))-\operatorname{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{2}+\frac{x^4+o\left(x^4\right)}{24}+o\left(x^4\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{6}.\end{aligned}$$

De plus, $\sin^4(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$. Donc par quotient,

$$\frac{\operatorname{ch}(\sin(x))-\operatorname{ch}(x)}{\sin^4(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{ch}(\sin(x))-\operatorname{ch}(x)}{\sin^4(x)} = -\frac{1}{6}.}$$

1.9 On a

$$\boxed{\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+\frac{h^5}{5}+o\left(h^5\right).}$$

De plus, en posant $h=x-1$ i.e. $x=1+h$, on a, au voisinage de 1,

$$\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)} \underset{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}{=} \frac{(1+h)^{1+h}-1-h}{1-1-h+\ln(1+h)} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} \frac{(1+h)^{1+h}-1-h}{\ln(1+h)-h}.$$

Or

$$\begin{aligned}(1+h)^{1+h}-1-h &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{(1+h)\ln(1+h)}-1-h\\ &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)}-1-h\\ &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)+h^2+o\left(h^2\right)}-1-h\\ &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)}-1-h.\end{aligned}$$

Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Or on a $u^2 \underset{h\to 0}{=} h^2+o\left(h^2\right)$ et $o\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}(1+h)^{1+h}-1-h &\underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)+\frac{h^2+o\left(h^2\right)}{2}+o\left(h^2\right)-1-h\\ &\underset{h\to 0}{=} h^2+o\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{\sim} h^2.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\ln(1+h)-h \underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)-h \underset{h\to 0}{=} -\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}$$

Par quotient,

$$\frac{(1+h)^{1+h}-1-h}{\ln(1+h)-h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\sim} \frac{h^2}{-\frac{h^2}{2}} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)} = -2.}$$

2. **Familles génératrices.**

2.1 On a les égalités entre ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{l} x-z=0 \\ -3y+t=0 \\ 2x+9y-2z-3t=0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{l} x=z \\ t=3y \\ 2z+9y-2z-9y=0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (z,y,z,3y)\in\mathbb{R}^4 \ \middle|\ (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\3 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G} = \left(\begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\3 \end{bmatrix} \right) \text{ est génératrice dans } F}$.

2.2 On considère l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants d'inconnue f deux fois dérivable :

$$(E) \qquad f''+3f'+5f=0$$

Soit

$$(E_c) \qquad r^2+3r+5=0,$$

l'équation caractéristique associée. Son discriminant vaut $\Delta = 9-20=-11<0$. Les racines de (E_c) sont donc $r_1 = \frac{-3+i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\right) \end{array} \ \middle|\ (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G} = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right) \end{array} \right) \text{ est génératrice dans } F}$.

2.3 On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{G} = \left(1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\right) &\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(1, X, X-X^2, X^2-X^3\right) && C_2 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(1, X, X^2, X^2-X^3\right) && C_3 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(1, X, X^2, X^3\right) && C_4 \leftarrow C_3 - C_4
\end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est bien génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$. Or les opérations élémentaires ne modifie pas le caractère générateur d'une famille. Conclusion, $\boxed{\mathscr{G} \text{ est génératrice dans } \mathbb{R}_3[X]}$.

2.4 Montrons que $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Soit $f \in F = \mathrm{Vect}\left(\cos^2, \sin^2\right)$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda\cos^2 + \mu\sin^2$. Par linéarisation,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lambda\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) = \frac{\lambda+\mu}{2} + \frac{\lambda-\mu}{2}\cos(2x)\,.$$

Donc $f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ et ainsi $F \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Attention, cela ne suffit pas pour que $\mathscr{G}$ soit génératrice dans F, car il faut que $\mathscr{G}$ soit une famille de vecteurs de F. Exemple il serait inexact de dire que $\left(1, X, X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car $X^2 \notin \mathbb{R}_1[X]$.
Réciproquement si $f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) &= \lambda + \mu\cos(2x)\\ &= \lambda\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) + \mu\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\\ &= (\lambda+\mu)\cos^2(x) + (\lambda-\mu)\sin^2(x).\end{aligned}$$

Donc $f \in F$ et $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subseteq F$. Conclusion, $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ et $\boxed{\mathscr{G} \text{ est une famille génératrice de } F}$.
Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos(2x)\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2 + \sin^2,\ \cos^2 - \sin^2\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2 + \sin^2,\ 2\cos^2\right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_1\\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2 + \sin^2,\ \cos^2\right) && C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2\\ &= \mathrm{Vect}\left(\sin^2,\ \cos^2\right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2\\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2,\ \sin^2\right) && C_1 \leftrightarrow C_2.\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{F = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \text{ et } \mathscr{G} \text{ est génératrice dans } F}$.

2.5 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_4\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow -\tfrac{1}{5}C_1\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_3 \leftarrow C_3 - C_1\\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1\end{array}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow C_4\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_3 \leftarrow C_3 - C_2\\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2\end{array}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftrightarrow C_4\\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)}_{\text{base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} && C_4 \leftarrow \tfrac{1}{3}C_4\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et donc } \mathscr{G} \text{ est génératrice dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

3. **Familles libres/liées.**

3.1 On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\mathscr{L} = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right) \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\0\\-3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow -\frac{1}{3}C_2 \\ C_3 \leftarrow -C_3 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{C}}{\sim} \underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right)}_{=\mathscr{L}'} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array}$$

La famille $\mathscr{L}'$ admet deux vecteurs identiques et est donc liée. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère lié d'une famille donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est liée}}$.

3.2 On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \right) \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

$$\underset{\mathscr{C}}{\sim} \underbrace{\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \right)}_{\mathscr{L}'} \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_2$$

On note que $\mathscr{L}'$ est échelonnée en ses coordonnées et est donc libre. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre d'une famille. Donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.3 Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = 0_E$. Alors,

$$0_E = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{i} u_j.$$

On reconnait une somme triangulaire. Ainsi,

$$0_E = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p} \lambda_i\, u_j = \sum_{j=1}^{p} u_j \sum_{i=j}^{p} \lambda_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j u_j,$$

où pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $\mu_j = \sum_{i=j}^{p} \lambda_i$. Or la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Donc

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \qquad \mu_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

On obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{lrl} \mu_1 = & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p & = 0 \\ \mu_2 = & \lambda_2 + \cdots + \lambda_p & = 0 \\ \vdots & \vdots & \\ \mu_p = & \lambda_p & = 0 \end{array} \right.$$

Le système est échelonné, de rang p. Il admet donc une unique solution :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{L} = (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre}}$.

3.4 *Méthode 1 : par échelonnement.* On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \left(X\,(X-1)^2,\ X^2\,(X-1),\ X^3,\ (X-1)^3\right) \\
&= \left(X^3-2X^2+X,\ X^3-X^2,\ X^3,\ X^3-3X^2+3X-1\right) \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(X^3-2X^2+X,\ X^3-X^2,\ X^3-3X^2+3X-1,\ X^3\right) && C_3 \leftrightarrow C_4 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(-2X^2+X,\ -X^2,\ -3X^2+3X-1,\ X^3\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(-2X^2+X,\ X^2,\ -3X^2+3X-1,\ X^3\right) && C_2 \leftarrow -C_2 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(-2X^2+X,\ -3X^2+3X-1,\ X^2,\ X^3\right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(X,\ 3X-1,\ X^2,\ X^3\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(3X-1,\ X,\ X^2,\ X^3\right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(1,\ X,\ X^2,\ X^3\right) && C_1 \leftarrow 3C_2 - C_1
\end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est libre. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre d'une famille. Donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

Seconde méthode : par la définition. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$P = \lambda_1\, X\,(X-1)^2 + \lambda_2\, X^2\,(X-1) + \lambda_3\, X^3 + \lambda_4\,(X-1)^3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Alors,

$$P(1) = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad P(0) = -\,\lambda_4 = 0.$$

Donc

$$0 = P = \lambda_1\, X\,(X-1)^2 + \lambda_2\, X^2\,(X-1) = X\,(X-1)\left[\lambda_1\,(X-1) + \lambda_2\, X\right].$$

Ainsi

$$Q = \lambda_1\,(X-1) + \lambda_2\, X = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Donc $Q(0) = -\,\lambda_1 = 0 = Q(1) = \lambda_2$. Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.5 Notons $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$ et $f_3 : x \mapsto |x+1|$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \lambda_3\, f_3 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1\,|x| + \lambda_2\,|x-1| + \lambda_3\,|x+1| = 0$$

En évaluant en 0, 1, et -1 respectivement, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\,\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\,\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\,\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\,\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\,\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\,\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\,\lambda_2 = 0 \\ 2\,\lambda_1 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.6 Posons pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $f_k : x \mapsto \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \sin(x) \\
f_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) \\
f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\
f_3(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x).
\end{aligned}$$

On observe alors en particulier que
$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2.$$
Donc f_1 est une combinaison linéaire de f_0 et f_2. Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est liée}}$.

4. **Coordonnées d'un vecteur.**

4.1 Pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, on pose $f_k : x \mapsto \sin(kx)$ et $f_0 : x \mapsto 1$. On a donc $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$. On a par la formule d'Euler, celle de Moivre, celle de Newton et le triangle de Pascal pour les coefficients,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{(2i)^4} \frac{\mathrm{e}^{5ix} - 5\,\mathrm{e}^{4ix-ix} + 10\,\mathrm{e}^{3ix-2ix} - 10\,\mathrm{e}^{2ix-3ix} + 5\,\mathrm{e}^{ix-4ix} - \mathrm{e}^{-5ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{16} \frac{\mathrm{e}^{5ix} - \mathrm{e}^{-5ix} - 5\,\mathrm{e}^{3ix} + 5\,\mathrm{e}^{-3ix} + 10\,\mathrm{e}^{ix} - 10\,\mathrm{e}^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}.\end{aligned}$$
D'où
$$f = 0 \times f_0 + \frac{10}{16} f_1 + 0 \times f_2 - \frac{5}{16} f_3 + 0 \times f_4 + \frac{1}{16} f_5.$$
Par conséquent, $\boxed{f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E \text{ et ses coordonnées dans la base } \mathscr{B} \text{ sont } \left(0, \tfrac{10}{16}, 0, -\tfrac{5}{16}, 0, \tfrac{1}{16}\right)}$.

Pour les curieux, montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{i \in [\![0;5]\!]} \in \mathbb{R}^6$ tel que
$$\sum_{i=0}^{5} \lambda_i f_i = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$
En particulier si $x = 0$,
$$0_{\mathbb{R}} = \sum_{i=0}^{5} \lambda_i f_i(x) = \lambda_0 + 0 = \lambda_0 .$$
Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0. \tag{1}$$
En prenant $x' = x + \pi$, on obtient également
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 &= \lambda_1 \sin(x+\pi) + \lambda_2 \sin(2x + 2\pi) + \lambda_3 \sin(3x + 3\pi) + \lambda_4 \sin(4x + 4\pi) + \lambda_5 \sin(5x + 5\pi) \\ &= -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) - \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) - \lambda_5 \sin(5x) \qquad (2)\end{aligned}$$
En faisant (1)+(2), on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2\,\lambda_2 \sin(2x) + 2\,\lambda_4 \sin(4x) = 0$$
Donc pour $x = \frac{\pi}{4}$, $2\,\lambda_2 = 0$ i.e. $\lambda_2 = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$, $\lambda_4 = 0$. Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0.$$
Utilisons une autre technique pour varier un peu. On a alors au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned}0 &\underset{x\to0}{=} \lambda_1 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) + \lambda_3 \left(3x - \frac{3^2 x^3}{6} + \frac{3^5 x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) + \lambda_5 \left(5x - \frac{5^2 x^3}{2} + \frac{5^5 x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to0}{=} (\lambda_1 + 3\,\lambda_3 + 5\,\lambda_5)\, x - \frac{x^3}{6}\left(\lambda_1 + 3^3\,\lambda_3 + 5^3\,\lambda_5\right) + \frac{x^5}{120}\left(\lambda_1 + 3^5\,\lambda_3 + 5^5\,\lambda_5\right) + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$
Par unicité du développement limité, on obtient
$$\begin{cases}\lambda_1 + 3\,\lambda_3 + 5\,\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 3^3\,\lambda_3 + 5^3\,\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 3^5\,\lambda_3 + 5^5\,\lambda_5 &= 0\end{cases}$$
On échelonne le système et on obtient finalement que $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Or nous avions aussi $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\mathscr{B}$ est libre.

4.2 La famille $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses degrés donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est libre dans } \mathbb{R}_n[X]}$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k .$$

Donc $\boxed{P \in \mathbb{R}_n[X]}$ et ainsi $\mathbb{R}_n[X] \subseteq \text{Vect}(\mathscr{B})$. Or $\text{Vect}(\mathscr{B}) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}$ est donc génératrice dans $\mathbb{R}_n[X]$. Or elle est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, toujours par la formule de Taylor, $\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ dans } \mathscr{B} \text{ est } \left(P(1), P'(1), \frac{P''(1)}{2}, \ldots, \frac{P^{(n)}(1)}{n!}\right)}$. Chanmé non ?

4.3 Les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u = \lambda e_1 + \mu e_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda + \mu \\ 3\lambda - \mu \\ -\lambda - 2\mu \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ 3\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + 3\lambda = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 6\lambda = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases} .
\end{aligned}$$

On a bien une solution, donc $u = e_1 + 3e_2 \in \text{Vect}(\mathscr{B})$ et ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(1, 3)$.

4.4 Par opérations élémentaires, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right) &\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i-1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i+1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{2i} C_2 - C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-i \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - (1+i)\, C_2 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow \tfrac{1}{-1-i} C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - iC_3
\end{aligned}$$

On obtient alors la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Or les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère générateur ni le caractère libre. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $\mathbb{C}^3$. Conclusion, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^3}$.

Notons (e_1, e_2, e_3) les trois vecteurs de $\mathscr{B}$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b+c \\ -a+bi+ci \\ ai+b-c \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ -a+bi+ci = 1-i \\ ai+b-c = i \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i)+c(1+i) = 2 \\ b(1+i)+c(-1-i) = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - iL_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i)+c(1+i) = 2 \\ 2ib = 3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c = 1+i \\ b(-1+i)+c(1+i) = 2 \\ b = -\frac{3i}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
c = \frac{1}{1+i}(2 - b(-1+i)) = \frac{1}{1+i}\left(2 + \frac{3i}{2}(-1+i)\right) = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right) &= \frac{(1-i)(1-3i)}{4} \\
&= \frac{-2-4i}{4} \\
&= -\frac{1}{2} - i
\end{aligned}$$

et

$$a = 1 + i + b - c = 1 + i - \frac{3i}{2} + \frac{1}{2} + i = \frac{3+i}{2}.$$

On a donc

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3+i}{2} \\ b = -\frac{3i}{2} \\ c = -\frac{1}{2} - i. \end{cases}$$

Pensez à vérifiez vos calculs en calculant $ae_1 + be_2 + ce_3$.

Conclusion, $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } \mathscr{B} \text{ sont } \left(\frac{3+i}{2}, -\frac{3i}{2}, -\frac{1}{2} - i\right)}$.

4.5 On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \qquad C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2
\end{aligned}$$

On reconnait la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre ni le caractère générateur d'une famille. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Notons (E_1, E_2, E_3, E_4) les quatre matrices de $\mathscr{B}$. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
J = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & a+b+d \\ b+c+d & c+2d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ d=-2 \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{les coordonnées de } J \text{ dans } \mathscr{B} \text{ sont } (3,-1,3,-2)}$.

5. **Théorème de la base adaptée.**

5.1 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} -x+y+z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} -x+y+z & = 0 \\ 2y & = 0 \end{array} \right\} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x & = z \\ y & = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $e_1 = (1,0,1)$ et $\mathscr{B}_F = (e_1)$. Puisque $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\mathscr{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice de F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. D'autre part,

$$G = \left\{ (x+y, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Posons $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B}_G = (e_2, e_3)$. Les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_G$ est libre et par ce qui précède génératrice dans G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G.

Posons maintenant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right) \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right) && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right) && C_3 \leftrightarrow C_2 - C_3 \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right) && C_1 \leftrightarrow C_1 - C_3
\end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre ni le caractère générateur d'une famille. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $\mathbb{R}^3$ et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Donc par le théorème de la base adaptée à la somme, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

5.2 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique. Elle est de plus génératrice dans F et donc forme une base de F.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} a - b = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} b = a \\ 2a - 2c = 0 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans G par ce qui précède et donc forme une base de G.
Enfin, on pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2.
\end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère libre ni le caractère générateur d'une famille. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc par le théorème de la base adaptée à la somme, on en déduit que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5.3 Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left[a_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad a_0 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad P = a_2\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + a_1\left(X - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F = \mathrm{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\right).$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\right)$. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre car les deux polynômes ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans F et forme donc une base de F.
Posons $G = \mathrm{Vect}\,(1)$. Alors $\mathscr{B}_G = (1)$ est libre (car $1 \neq 0$) et génératrice dans G donc forme une base de G. Posons également $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors, on a

$$\mathscr{B} = \left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2},\ 1\right) \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(X^2,\ X,\ 1\right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + \frac{1}{3}C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_3 \end{array}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre ni le caractère générateur. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc par le théorème de la base adaptée à la somme, on en déduit que

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\,(1) \text{ est bien un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_2[X].}$$

5.4 Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F \quad \Leftrightarrow \quad P(1) = P'(1) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 1 \text{ est racine de multiplicité au moins 2 de } P \\ & \Leftrightarrow \quad (X-1)^2 \text{ divise } P \\ & \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], \quad P = Q\,(X-1)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}, \quad P = (aX+b)\,(X-1)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}, \quad P = aX\,(X-1)^2 + b\,(X-1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left(X\,(X-1)^2,\ (X-1)^2\right).$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(X\,(X-1)^2,\ (X-1)^2\right)$. Les deux polynômes ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice dans F. Donc $\mathscr{B}$ forme une base de F. Posons $\mathscr{B}_G = (X, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_G)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et engendre G donc forme une base de G. Posons enfin $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Puisque $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses degrés, on en déduit déjà que $\mathscr{B}$ est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= \left(X^3 - 2X^2 + X,\ X^2 - 2X + 1,\ X,\ 1\right) \\ &\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(X^3 - 2X^2,\ X^2,\ X,\ 1\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_3 - C_4 \end{array} \\ &\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(X^3,\ X^2,\ X,\ 1\right) && C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Or les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère libre ni le caractère génératrice. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice et donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc par le théorème de la base adaptée à la somme, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

5.5 On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; d = -a-b-c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Posons également $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_4 \end{matrix} \end{aligned}$$

On reconnait alors la base canonique. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre et générateur d'une famille. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus, $\mathscr{B}_F$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et est donc libre. Or elle engendre F et forme donc une base de F.
Puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_2$, on en déduit que $\mathscr{B}_G$ est libre et génératrice dans G donc forme une base de G.
Par conséquent, d'après le théorème de la base adaptée à la somme, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F.}$$