Correction de l'interrogation 25 d'entrainement Dénombrement

0. **Révisions**

0.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a directement,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{3n} \sum_{p=n}^{k-1} a_{k,p} = \sum_{n \leqslant p < k \leqslant 3n} a_{k,p} = \sum_{p=n}^{3n-1} \sum_{k=p+1}^{3n} a_{k,p}.}$$

0.2 On a les résultats suivants :

- Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- Formule de Taylor : Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $a \in \mathbb{K}$. Alors,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \qquad \text{i.e.} \qquad P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

- Définition de la multiplicité : On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
- Caractérisation 1 : cela est aussi équivalent à : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.
- Caractérisation 2 : ou encore : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

0.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, $a_n \neq 0$. Notons $x_1, \dots x_n$ les n racines de P (éventuellement confondues). Alors

$$x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Sachant que 5, -7 et -2 sont racines de $X^4 - 8X^3 - 79X^2 + 302X + 840$, en notant x sa quatrième racine on a

$$5 - 7 - 2 + x = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-8}{1} = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{x = 8 + 4 = 12.}$$

Autre méthode :

$$5(-7)(-2)x = 70x = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^4 \frac{840}{1} = 840 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{840}{70} = \frac{84}{7} = 12.}$$

1. **Restituer le cours.**

1.1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ un entier, $p_1, \dots, p_d$ des nombres premiers, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in (\mathbb{N}^*)^d$ des entiers naturels non nuls tels que

$$n = \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}.$$

De plus cette décomposition est unique.

1.2 Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $\varphi \in \mathscr{F}(E,F)$. Alors

$$\varphi \text{ est bijective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ est injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ est surjective.}$$

1.3 Soient E un ensemble fini et $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ deux parties de E. Alors

$$\operatorname{Card}(A \cup B) + \operatorname{Card}(A \cap B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

En particulier si A et B sont disjoints alors

$$\operatorname{Card}(A \sqcup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

1.4
- La construction d'un p-uplet d'éléments dans un ensemble E de cardinal n correspond à un tirage successif et avec remise de p éléments parmi n.

- La construction d'un arrangement de p éléments parmi n correspond à un tirage successif et sans remise de p éléments parmi n.
- La construction d'une combinaison de p éléments parmi n correspond à un tirage simultané de p éléments parmi n.

1.5 Notons $n = \text{Card}\,(E)$ et $p = \text{Card}\,(F)$. Le nombre d'applications de E dans F est

$$\text{Card}\,(\mathscr{F}\,(E,F)) = \text{Card}\,(F)^{\text{Card}(E)} = p^n.$$

Le nombre d'applications injectives est donné par (j'inverse les notations pour vous embêter)

$$A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}.$$

Le nombre d'applications bijectives est 0 si $p \neq n$ et $n!$ si $p = n$.

1.6 Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}\,(E)$ et son cardinal est

$$\text{Card}\,(\mathscr{P}\,(E)) = 2^n.$$

2. **Calculer un PGCD/PPCM.** *A faire sans calculatrice !*

2.1 On observe que

$$1386 = 2 \times 693 = 2 \times 9 \times 77 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

et

$$660 = 10 \times 66 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11.$$

Par conséquent,

$$PGCD\,(1386, 660) = 2 \times 3 \times 11 = 66$$

et

$$PPCM\,(1386, 660) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 1386 \times 2 \times 5 = 1386 \times 10 = 13860.$$

Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(1386, 660) = 66 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(1386, 660) = 13860.}$$

2.2 On observe que

$$\begin{aligned} 1625 &= 5 \times 325 = 5^2 \times 65 = 5^3 \times 13 \\ 975 &= 5 \times 195 = 5^2 \times 39 = 5^2 \times 3 \times 13 = 3 \times 5^2 \times 13. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} PGCD\,(1625, 975) &= 5^2 \times 13 = 5 \times 65 = 325 \\ PPCM\,(1625, 975) &= 3 \times 5^3 \times 13 = 3 \times 1625 = 4875. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(1625, 975) = 325 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(1625, 975) = 4875.}$$

2.3 On a

$$\begin{aligned} 682 &= 2 \times 341 = 2 \times 11 \times 31 \\ 87 &= 3 \times 29. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} PGCD\,(682, 87) &= 1 \\ PPCM\,(682, 87) &= 682 \times 87 = 59334. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(682, 87) = 1 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(682, 87) = 59334.}$$

2.b1 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}5252 &= 3346 \times 1 + 1906\\ 3346 &= 1906 \times 1 + 1440\\ 1906 &= 1440 \times 1 + 466\\ 1440 &= 466 \times 3 + 42\\ 466 &= 42 \times 11 + 4\\ 42 &= 4 \times 10 + 2\\ 4 &= 2 \times 2 + 0.\end{aligned}$$

Le dernier reste non nul étant 2, on en déduit que $PGCD\,(5252, 3346) = 2$ puis

$$PPCM\,(5252, 3346) = \frac{5252 \times 3346}{2} = 5252 \times 1673 = 8786596.$$

Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(5252, 3346) = 2 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(5252, 3346) = 8786596.}$$

2.b2 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}770 &= 2 \times 365 + 40\\ 365 &= 9 \times 40 + 5\\ 40 &= 8 \times 5 + 0.\end{aligned}$$

Le dernier reste non nul étant 5, on en déduit que $PGCD\,(770, 365) = 5$ puis $PPCM\,(770, 365) = \frac{770\times365}{5} = 770 \times 73 = 56210$. Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(770, 365) = 5 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(770, 365) = 56210.}$$

2.b3 On a

$$\begin{aligned}787 &= 682 + 105\\ 682 &= 6 \times 105 + 52\\ 105 &= 52 \times 2 + 1\\ 52 &= 52 \times 1 + 0.\end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 1 et donc $PGCD\,(787, 682) = 1$ i.e. les nombres 682 et 787 sont premiers entre eux. D'où $PPCM\,(787, 682) = 787 \times 682 = 536734$. Conclusion,

$$\boxed{PGCD\,(787, 682) = 1 \qquad \text{et} \qquad PPCM\,(787, 682) = 536734.}$$

3. **Calculs de cardinaux.**

3.1 On pose E l'ensemble des dahus, A l'ensemble des dahus dextrogyres et B l'ensemble des dahus avec des ailes. D'après l'énoncé, on a $|E| = 234$, $|A| = 91$ et $\left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| = 173$ et l'on cherche $\left|A \cap \overline{B}\right|$. Puisque $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, on en déduit que

$$|A \cap B| = |E| - \left|\overline{A \cap B}\right| = |E| - \left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| = 234 - 173 = 61.$$

Comme $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \sqcup (A \cap B)$, on en déduit que

$$\left|A \cap \overline{B}\right| = |A| - |A \cap B| = 91 - 61 = 30.$$

Conclusion, $\boxed{\text{30 dahus dextrogyres sont sans aile}}$.

3.2 Avec les notations de la question précédente, on a $\mathrm{Card}\,(E) = 32$, $\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = 15$, $\mathrm{Card}\,(B) = 19$, $\mathrm{Card}\,(A \cap B) = 8$ et l'on cherche $\mathrm{Card}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$. Puisque $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(A \cup B)\\ &= \mathrm{Card}\,(E) - (\mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B))\\ &= \mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) - \mathrm{Card}\,(B) + \mathrm{Card}\,(A \cap B)\\ &= 15 - 19 + 8 = 4.\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{4 dahus sont lévogyres sans aile}}$.

3.3 Avec les notations des questions précédentes, on a $|E| = 203$, $\left|\overline{B}\right| = 103$ et $\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = 11$, $\left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| = 191$ et l'on cherche $|A|$. On a

$$\begin{aligned}|A| &= |E| - \left|\overline{A}\right| \\ &= |E| - \left(\left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| - \left|\overline{B}\right| + \left|\overline{A} \cap \overline{B}\right|\right) \\ &= 203 - (191 - 103 + 11) = 203 - 99 = 104.\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{104 dahus sont dextrogyres}}$.

3.4 Avec les notations des questions précédentes, on a $\mathrm{Card}\,(A) = 62$, $\mathrm{Card}\,(B) = 41$, $\mathrm{Card}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 103$, $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = 87$ et l'on cherche $\mathrm{Card}\,(E)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\,(E) &= \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\left(\overline{A \cap B}\right) \\ &= \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cup B) + \mathrm{Card}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= 62 + 41 - 87 + 103 \\ &= 119.\end{aligned}$$

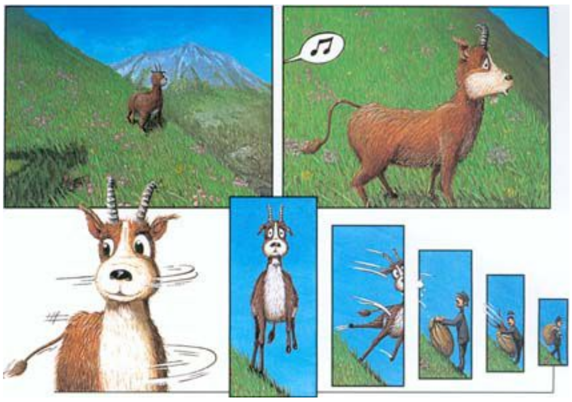
Conclusion, $\boxed{\text{le Jura compte 119 dahus}}$.

3.5 En gardant les mêmes notations, on a $A \subseteq B$, $\#E = 117$, $\#B = 110$, $\#\overline{A} = 106$ et l'on cherche $\#\overline{A} \cap B$. Puisque $A \subseteq B$, on a $B = (B \setminus A) \sqcup A = \left(B \cap \overline{A}\right) \sqcup A$. Donc

$$\begin{aligned}\#\overline{A} \cap B &= \#B - \#A \\ &= \#B - \left(\#E - \#\overline{A}\right) \\ &= 110 - (117 - 106) \\ &= 99.\end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{\text{99 dahus sont lévogyres avec des ailes}}$.

3.6 C'est une technique bien connue des montagnards, il suffit de s'approcher du dahu par derrière puis de siffler un air engageant ou de l'appeler. Cet animal étant très curieux mais pas très futé, il se retourne. Ayant alors les deux pattes plus courtes dans la pente il tombe et vous n'avez plus qu'à le cueillir.



4. **Dénombrer avec des objets discernables.**

4.1 On procède de la façon suivante :

- On commence par choisir la couleur, on a alors

$$\binom{4}{1} \text{ possibilités.}$$

- Puis la couleur étant choisie il nous faut prendre 5 cartes parmi les 13 de cette couleur, le tirage étant simultané :

$$\binom{13}{5} \text{ choix.}$$

Au total, on a

$$\boxed{\binom{4}{1}\binom{13}{5} \text{ possibilités.}}$$

4.2 Pour construire un brelan, on procède de la façon suivante :

- on choisit d'abord la valeur des cartes identiques. On a 13 valeurs possibles, on prend donc 1 parmi 13 :
$$\binom{13}{1} \text{ choix.}$$
Appelons v la valeur choisie.
- On choisit ensuite trois cartes de cette valeur v parmi les 4 possibles :
$$\binom{4}{3} \text{ choix.}$$
- Il nous faut enfin choisir deux cartes parmi toutes les cartes du jeu qui non pas la valeur v. Il a 4 cartes de valeur v donc $52 - 4 = 48$ cartes qui n'ont pas la valeur v. L'ordre dans une main étant sans importance, cela constitue un tirage simultané de deux cartes parmi 48 :
$$\binom{48}{2} \text{ choix.}$$

Au total, on a

$$\boxed{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{48}{2} \text{ possibilités.}}$$

4.3 Pour construire une double paire, on procède de la façon suivante :

- On commence par choisir les valeurs des deux pairs. Puisqu'il y a dans le jeu 13 valeurs possibles, on a
$$\binom{13}{2} \text{ choix.}$$
Notons alors u et v les deux valeurs obtenues.
- On choisit alors pour u et pour v les deux cartes de cette valeur. On a à chaque fois deux cartes à choisir parmi les quatre de la même valeur donc
$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \text{ choix.}$$
- Il nous reste à choisir alors une dernière carte parmi toutes les cartes qui ne sont pas de la valeur u ou v : $52 - 4 - 4 = 44$ cartes. Donc
$$\binom{44}{1} = 44 \text{ choix.}$$

Au total, on a

$$\boxed{44\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \text{ possibilités.}}$$

4.4 *Méthode 1.*

- On commence par choisir 2 figures parmi toutes les figures. On a $3 \times 4 = 12$ figures possibles. On effectue un tirage simultané :
$$\binom{12}{2} \text{ choix.}$$
- Il nous faut ensuite choisir 2 as parmi les quatre as du jeu. Le tirage étant simultané, on a
$$\binom{4}{2} \text{ choix possibles.}$$

- Il nous reste alors à prendre une carte qui ne soit ni un as ni une figure donc il nous faut prendre une carte parmi $52 - 12 - 4 = 36$ et donc
$$\binom{36}{1} = 36 \text{ choix.}$$
- Nous avons maintenant toutes nos cartes il ne faut pas oublier les ranger, on fait donc une permutations de nos cinq cartes :
$$A_5^5 = 5! \text{ façons de les ranger.}$$

Au total, on a
$$\boxed{36\binom{12}{2}\binom{4}{2}5! \text{ dispositions possibles.}}$$

Méthode 2.

- On choisit la place de nos figures sur la table. Il nous faut donc prendre 2 positions parmi les 5 disponibles. C'est un tirage simultané :
$$\binom{5}{2} \text{ choix.}$$
- Puis dans ces positions, on range 2 figures parmi les 12 possibles, cela constitue un arrangement de 2 parmi 12 :
$$A_{12}^2 \text{ possibilités.}$$
- On fait de même pour les as. On choisit deux positions parmi les trois restantes :
$$\binom{3}{2} \text{ choix.}$$
- On range dans ces positions 2 as parmi les 4 possibles :
$$A_4^2 \text{ façons.}$$
- Enfin on tire une carte qui n'est ni une figure ni un as dans la dernière position libre :
$$\binom{36}{1} = 36 \text{ choix.}$$

Au total, on a
$$\boxed{36\binom{5}{2}A_{12}^2\binom{3}{2}A_4^2 \text{ possibilités.}}$$

En développant chacune des expressions en factoriels, on vérifie que l'on trouve le même résultat dans chaque cas :
$$\begin{aligned}
36\binom{12}{2}\binom{4}{2}5! = 36\binom{5}{2}A_{12}^2\binom{3}{2}A_4^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \binom{12}{2}\binom{4}{2}5! = \binom{5}{2}A_{12}^2\binom{3}{2}A_4^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{12!}{2\times 10!}\frac{4!}{2\times 2}5! = \frac{5!}{2\times 3!}\frac{12!}{10!}\frac{3!}{2}\frac{4!}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{3!}{3!}
\end{aligned}$$

La dernière assertion n'ayant pas l'air trop fausse, on en déduit que l'assertion initiale est aussi vraie.

4.5 On procède de la façon suivante :

- On choisit une couleur parmi les quatre possibles : on a donc
$$\binom{4}{1} = 4 \text{ choix.}$$
- Puis il nous faut tirer successivement et sans remise 5 cartes parmi les 13 de cette même couleur :
$$A_{13}^5 \text{ choix.}$$

Au total on a donc

$$\boxed{4A_{13}^5\text{possibilités.}}$$

4.6 *Méthode 1.* On procède de la façon suivante :

- On choisit les quatre positions des as parmi les cinq possibles : c'est un tirage simultané donc
$$\binom{5}{4} \text{ choix possibles.}$$
- Une fois les positions choisies, on y range nos quatre as, cela constitue une permutation des quatre as du jeu :
$$A_4^4 \text{ choix possibles.}$$
- Enfin, on choisit une carte parmi celle qui ne sont pas des as pour compléter notre disposition : c'est un tirage d'une carte parmi $52 - 4 = 48$ cartes :
$$\binom{48}{1} = 48 \text{ choix.}$$

Au total, on a

$$\boxed{48\binom{5}{4}A_4^4 \text{ possibilités.}}$$

Méthode 2. On procède de la façon suivante :

- On prend nos quatre as (une seule façon) auxquels on ajoute notre cinquième carte on pioche donc une carte parmi les $52 - 4 = 48$ cartes non-as :
$$\binom{48}{1} = 48 \text{ choix.}$$
- On ordonne nos 5 cartes, cela constitue une permutation :
$$5! \text{ façons.}$$

Au total, on a

$$\boxed{48 \times 5! \text{ possibilités.}}$$

5. **Dénombrer avec des objets indiscernables.**

5.1 On procède de la façon suivantes :

- On choisit les 5 places pour les boules rouges : c'est un tirage simultané de 5 parmi $5 + 2 + 3 = 10$
$$\binom{10}{5} \text{ choix.}$$
Notez alors qu'il n'y a qu'une seule façon de ranger les cinq boules dans ces cinq cases puisque les boules rouges sont indiscernables.
- On choisit alors les 2 places pour les boules blanches parmi les $10 - 5 = 5$ places restantes :
$$\binom{5}{2} \text{ choix.}$$
- On range les boules vertes dans les cases restantes : une seule façon.

Au total, on a

$$\boxed{\binom{10}{5}\binom{5}{2} \text{ possibilités.}}$$

5.2 Pour ranger toutes les boules d'une même couleur à côté il suffit d'ordonner les couleurs (par exemple on met toutes les boules rouges puis toutes les blanches puis toutes les vertes, dans ce cas cela revient à mettre les rouges en position 1, les blanches en position 2 et les vertes en position 3). Il suffit donc de permuter les trois couleurs possibles :

$$\boxed{3! \text{ possibilités.}}$$

5.3 Passons au complémentaire. Dénombrons le nombre de rangements pour lesquels les deux boules blanches sont côte à côte. Parmi les 10 places elles doivent donc être en position 1-2 ou 2-3 ou 3-4 etc. Ou encore il suffit de déterminer la position de la première boule blanche qui peut donc se trouver dans les places 1 à 9 (mais pas en 10 car la seconde ne pourrait être mise derrière).

- On choisit la place de la première boule blanche :
$$\binom{9}{1} = 9 \text{ choix.}$$
- On place derrière l'autre boule blanche : une seule façon de faire.
- On range alors les autres boules comme dans la question 5.1. On choisit les places des boules rouges parmi les $10 - 2 = 8$ places restantes :
$$\binom{8}{5} \text{ choix.}$$
- On place enfin les boules vertes dans les places restantes : un seul choix.

Donc on a au total
$$9\binom{8}{5} \text{façons de ranger les boules avec les deux blanches voisines.}$$
Or nous avons vu à la question 5.1 que nous avions $\binom{10}{5}\binom{5}{2}$ possibilités de ranger (n'importe comment) toutes les boules. Conclusion, le nombre de rangements avec les deux boules blanches non-voisines est
$$\boxed{\binom{10}{5}\binom{5}{2} - 9\binom{8}{5}.}$$

5.4 Notez qu'il y a suffisamment de boules de chaque couleur pour que tous les tirages imaginables soient possibles. On procède de la façon suivante :

- On choisit la place des deux boules rouges parmi les cinq possibles :
$$\binom{5}{2} \text{ choix.}$$
- On choisit la couleur de la première boule non-rouge : deux choix possibles puis la couleur de la seconde boule non-rouge puis la couleur de la troisième boule non-rouge. Autrement dit on créé un triplet à valeurs dans l'ensemble $\{\text{blanche}, \text{verte}\}$. Donc
$$2^3 \text{ choix.}$$

Au total, on a donc
$$\boxed{2^3\binom{5}{2} \text{ possibilités.}}$$

5.5 On procède de la façon suivante :

- On choisit la couleur de la première boule : trois choix.
- On choisit la couleur de la deuxième boule parmi les deux autres couleurs différentes de la couleur de la boule 1 : deux choix.
- On choisit la couleur de la troisième boule parmi les deux autres couleurs différentes de la couleur de la boule 2 : deux choix.

  $\vdots$

Après avoir pioché la première boule, cela revient donc à construire un 4-uplet parmi un ensemble à 2 éléments Donc au total :
$$\boxed{3 \times 2^4 \text{ possibilités.}}$$

5.6 Passons au complémentaire et dénombrons d'abord le nombre de rangements présentant strictement moins que 2 boules rouges c'est-à-dire 0 boules rouges ou une seule boule rouge.

- Pour n'avoir aucun boule rouge, il suffit de choisir à chaque tirage ou une boule blanche ou une boule verte. Donc deux choix par tirages et ainsi au total :

$$2^5 \text{ choix.}$$

- Pour avoir une seule boule rouge, il suffit de choisir la place de la boule rouge : 5 choix puis dans les quatre places restantes de choisir ou une boule blanche ou une boule blanche donc 2^4 choix. Ainsi au total :

$$5 \times 2^4 \text{ choix.}$$

Ainsi, le nombre de possibilités pour obtenir strictement moins que deux boules rouges est

$$2^5 + 5 \times 2^4 = 7 \times 2^4.$$

Or le nombre total de rangement s'obtient en choisit une couleur à chaque tirage : cinq tirages successifs et avec remise parmi trois et donc

$$3^5 \text{ choix possibles.}$$

Finalement le nombre de tirages avec au moins deux boules rouges est

$$\boxed{3^5 - 7 \times 2^4.}$$