Interrogation 27 d'entrainement
Intégration

0. **Révisions.**

0.1 Déterminer un équivalent simple de $u_n = \ln\left(5 + n^2 + n\right) + \ln\left(n^2 - n + 3\right) - 2\ln\left(n^2\right)$ en $+\infty$.

0.2 Enoncer la proposition liant les propriétés de f avec l'image d'une base puis déterminer si

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & a_0 + a_1 + a_2 + (a_0 + 2a_1 + 3a_2)\,X + (a_0 - a_1 + 2a_2)\,X^2 \end{array}$$

est injective, surjective et/ou bijective. *On admettra que $f \in \mathscr{L}(E)$.*

0.3 Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ existe pour calculer cette intégrale.

1. **Restituer le cours.**

1.1 Enoncer le théorème de Weierstrass.

1.2 Enoncer la propriété de séparation de l'intégrale.

1.3 Enoncer l'inégalité triangulaire.

1.4 Enoncer l'inégalité de la moyenne.

1.5 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

1.6 Enoncer la formule de Taylor-Reste intégral.

1.7 Pourquoi appelle-t-on un trois demis, un trois demis et un cinq demis, un cinq demis ?

2. **Encadrer une intégrale.**

2.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos\left(\sqrt{t}\right)\ln(t)}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

2.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\,t^5\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

2.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right)f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. **Sommes de Riemann.**

3.1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

3.2 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

3.3 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

3.4 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$.

3.5 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

4. **Théorème fondamental de l'analyse.**

   4.1 Justifier que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et donner une expression de sa dérivée.
   Bonus : montrer que φ est définie mais pas continue 0.

   4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1+tx)^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de $\varphi'(0)$.

   4.3 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{x+1}^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.

   4.4 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \ln\left(\displaystyle\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et donner une expression de sa dérivée.

   4.5 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_2^3 (tx)^{tx}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.

5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**

   5.1 Enoncer la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{\mathrm{e}^{2x}(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$.

   5.2 Enoncer la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   5.3 Enoncer la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $f : t \mapsto \tan(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{8x^3}{3}$.

   5.4 Enoncer la formule de Taylor à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in [0; +\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par x^{n+1}.

   5.5 Enoncer la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ aux points $0 < a < b$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.