Correction de l'interrogation 9 d'entrainement Calcul d'intégrales

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est $\mathscr{C}^1$ sur I noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si

- f est dérivable sur I
- f' est continue sur I.

1.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

est $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f s'annulant en a.

1.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in [a; b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$

Alors,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.4 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.5 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **Reconnaitre une primitive/Savoir dériver.** Dans chaque cas, l'ensemble des primitives est donné par :

2.1 $\left\{ x \mapsto \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{5x}} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.2 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin(3\ln(x)) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.3 $\{ x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}$.

2.4 $\left\{ x \mapsto \frac{5^{x^3}}{3\ln(5)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.5 $\left\{ x \mapsto \frac{-1}{3}\operatorname{ch}\left(\frac{3}{x}\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.6 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|1 + x^2\right|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.7 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{sh}\left(\mathrm{e}^{3x}\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.8 $\left\{ x \mapsto \frac{3}{2}(x\ln(x) - x)^2 + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.9 $\left\{ x \mapsto \frac{\pi^{x^2}}{2\ln(\pi)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.10 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\sin(2x+1)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.11 $\{ x \mapsto \arctan(\operatorname{ch}(x)) + C \mid C \in \mathbb{R} \}$.

2.12 $\{ x \mapsto \ln(|\sin(x)|) + C \mid C \in \mathbb{R} \}$.

2.13 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{4}\ln(|\ln(4x)|) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.14 $\left\{ x \mapsto \ln\left(\left|2x^2 + 3x + 5\right|\right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.15 $\left\{ x \mapsto -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2(x)} + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.16 $\left\{ x \mapsto -\frac{1}{2}\arccos^2(x) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$.

Dans chaque cas, la dérivée est :

2.21 $x \mapsto \frac{2+x}{x}$.

2.22 $x \mapsto 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh}^2(x)}$.

2.23 $x \mapsto \frac{3(\ln(x)+1)x^{3x}}{\sqrt{1-x^{6x}}}$.

2.24 $x \mapsto -\frac{\operatorname{ch}(x)\sin(\operatorname{sh}(x))}{\cos^2(\cos(\operatorname{sh}(x)))}$.

2.25 $x \mapsto \frac{10x\,\mathrm{e}^{5x^2}}{3+\mathrm{e}^{5x^2}}$.

2.26 $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\arccos^2(x))}}$.

2.27 $x \mapsto \frac{\left(3+10x-15x^2\right)\mathrm{e}^{3x}}{(1-5x^2)^2}$.

2.28 $x \mapsto \frac{\cos(x)\ln\left(\operatorname{sh}\left(x^2\right)\right)}{\sin(x)} + \frac{2x\operatorname{ch}\left(x^2\right)\ln(\sin(x))}{\operatorname{sh}(x^2)}$.

2.29 $x \mapsto \frac{2\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

2.30 $x \mapsto \frac{6\operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}^2(2x)}{\cos^2(\operatorname{sh}^3(2x))}$.

2.31 $x \mapsto (2x\ln(x)+x)\,(\ln(x))^{x^2}$.

2.32 $x \mapsto \left(3+2\tan(3x)+3\tan^2(3x)\right)\mathrm{e}^{2x}$.

2.33 $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+\arctan^2(x)}}$.

2.34 $x \mapsto -\ln(\pi)\sin(x)\pi^{\cos(x)}$.

2.35 $x \mapsto \frac{3\ln^2(x)}{x(1+\ln^6(x))}$.

2.36 $x \mapsto \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$.

3. **Dérivation.**

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{n+1}\,\mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $[0\,;\,1]$. Donc $\boxed{I_{n+1} \text{ existe}}$. Posons pour tout $t \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t^{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $t \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = (n+1)\,t^n. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (n+1)t^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 0 - (n+1)\,I_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\,I_n.}$$

3.2 La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est continue sur $[-1\,;\,1]$ donc $x \mapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ est continue sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \mathrm{e}^{\arccos(x)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right] \subseteq \left]-1\,;\,1\right[$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x &= \left[x\,\mathrm{e}^{\arccos(x)}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}}{2} - 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On pose pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{cases} u(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ v(x) = \mathrm{e}^{\arccos(x)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right] \subseteq \left]-1\,;\,1\right[$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par une seconde intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \left[-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{\arccos(x)}\right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{e}^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}} - I. \end{aligned}$$

Donc $2I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$. Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}.}$$

3.3 La fonction $a \mapsto \cos(a)\operatorname{ch}(a)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi\,;\,0]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $a \in [-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases} u(a) = \sin(a) \\ v(a) = \operatorname{ch}(a). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi\,;\,0]$ et pour tout $a \in [-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases} u'(a) = \cos(a) \\ v'(a) = \operatorname{sh}(a). \end{cases}$$

Ainsi, par une intégration par parties,

$$I = \int_{-\pi}^{0} \cos(a)\operatorname{ch}(a)\,\mathrm{d}a = [\sin(a)\operatorname{ch}(a)]_{a=-\pi}^{a=0} - \int_{-\pi}^{0} \sin(a)\operatorname{sh}(a)\,\mathrm{d}a = -\int_{-\pi}^{0} \sin(a)\operatorname{sh}(a)\,\mathrm{d}a.$$

On pose alors pour tout $a \in [-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases} u(a) = -\cos(a) \\ v(a) = \operatorname{sh}(a). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi\,;\,0]$ et pour tout $a \in [-\pi\,;\,0]$,

$$\begin{cases} u'(a) = \sin(a) \\ v'(a) = \operatorname{ch}(a). \end{cases}$$

Par une seconde intégration par parties, on trouve

$$I = -\left[-\cos(a)\operatorname{sh}(a)\right]_{a=-\pi}^{a=0} + \int_{-\pi}^{0} -\cos(a)\operatorname{ch}(a)\,\mathrm{d}a = -\left(\operatorname{sh}(-\pi) + 0\right) - I = \operatorname{sh}(\pi) - I.$$

D'où, $2I = \operatorname{sh}(\pi)$. Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{2}.}$$

3.4 Pour tout $x \geqslant 2$, $x^2 - 1 > 0$. Donc $\sqrt{x^2-1}$ existe et $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 2 > 0$. Donc $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ existe. Ainsi la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est bien définie sur $[2\,;\,3] \subseteq [2\,;\,+\infty[$ et est même continue sur $[2\,;\,3]$ car composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons alors pour tout $x \in [2\,;\,3]$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[2\,;\,3]$ car pour tout $x \geqslant 2$, $x^2-1>0$ et donc $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[2\,;\,3]$. De plus, pour tout $a \in [2\,;\,3]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \end{cases}$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_2^3 \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x &= \left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln\left(3+\sqrt{8}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= 3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \sqrt{8}+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{2}+\sqrt{3}.}$$

3.5 La fonction $\theta \mapsto \theta\arctan^2(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$ donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \frac{\theta^2}{2} \\ v(\theta) = \arctan^2(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = \theta \\ v'(\theta) = \frac{2\arctan(\theta)}{1+\theta^2} \end{cases}$$

Donc par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \theta\arctan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \left[\frac{\theta^2}{2}\arctan^2(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} - \int_0^1 \frac{\theta^2}{2}\frac{2\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\arctan^2(1) - 0 - \int_0^1 \frac{\theta^2+1-1}{1+\theta^2}\arctan(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta) - \frac{\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^1 \frac{\arctan(\theta)}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Posons pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \theta \\ v(\theta) = \arctan(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $\theta \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = 1 \\ v'(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2}. \end{cases}$$

Alors par une intégration par parties dans la première intégrale,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^2}{32} - \left[\theta\arctan(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 \frac{\theta}{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta + \left[\frac{\arctan^2(\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=1} \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+\theta^2\right|\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=1} + \frac{\pi^2}{32} \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)-\ln(1)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi^2-4\pi+8\ln(2)}{16}.}$$

4. **Savoir faire un changement de variable.**

4.1 Pour tout $x \in]0\,;\pi[$, $\sin(x) > 0$. Donc f est continue sur $]0\,;\pi[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. Soient $x \in]0\,;\pi[$ et

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ qui est bien défini pour $t \in]0\,;\pi[$ car alors $\frac{t}{2} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}_{\tan}$. Alors par les formules de l'angle moitié, on sait que $\sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}$. De plus $t = 2\arctan(s)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$. Ainsi

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1+s^2}{2s}\,\frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{1}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \left[\ln(|s|)\right]_{s=1}^{s=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{car } \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ car } x \in]0\,;\pi[.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur }]0\,;\pi[}$ données par l'ensemble

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0\,;\pi[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin^2(x) \geqslant 1 > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle. Soient $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $a = \tan(t)$ qui est bien défini pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}_{\tan}$. Alors $t = \arctan(a)$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}a}{1+a^2}$. De plus $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(t)}$ (formule de la dérivée de la fonction tangente). Donc $\sin^2(t) = 1 - \frac{1}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{0}^{\tan(x)} \frac{1}{1+\frac{a^2}{1+a^2}}\,\frac{1}{1+a^2}\,\mathrm{d}a \\
&= \int_{0}^{\tan(x)} \frac{1}{1+2a^2}\,\mathrm{d}a \\
&= \int_{0}^{\tan(x)} \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}a\right)^2}\,\mathrm{d}a \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}a\right)\right]_{a=0}^{a=\tan(x)} \\
&= \frac{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \frac{\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)}{2} + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{sh}^2(x) \geqslant 1 > 0$. Donc f est bien définie et continue et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soient $x \in R$ et

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1+\mathrm{sh}(t)}{1+\mathrm{sh}^2(t)}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $u = \mathrm{sh}(t)$. Alors $\mathrm{d}u = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\mathrm{sh}(x)} \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\arctan(u)\right]_{u=0}^{u=\mathrm{sh}(x)} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+u^2\right|\right)\right]_{u=0}^{u=\mathrm{sh}(x)} \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{sh}^2(x)\right) \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}^2(x)\right) \\
&= \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(x)) \qquad \text{car } \mathrm{ch}(x) > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(x)) + C \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ et donc $\mathrm{ch}(x) - 1 \geqslant 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et donc admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+$. Soient $x \in R_+$ et

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\mathrm{ch}(t)-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $y = \mathrm{e}^t$. Alors $t = \ln(y)$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\frac{y + \frac{1}{y} - 2}{2}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\frac{y^2 - 2y + 1}{2y}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{|y-1|}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{y-1}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \qquad \text{car } y \geqslant 1 \text{ car } x \geqslant 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{y} + \frac{2}{\sqrt{y}}\right]_{y=1}^{y=\mathrm{e}^x} \\
&= \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 2\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

NB : on se rend compte a posteriori que l'on pouvait obtenir ce résultat directement par les formules sur les fonctions hyperboliques : on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{ch}(t)-1} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} &= \sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) + 1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} \\
&= \sqrt{2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \textit{car } t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=x} = 2\sqrt{2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_+}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4.5 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + x^6 \geqslant 1 > 0$ et $x \neq 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $x \in R_+^*$ et

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $\theta = \sqrt{1+t^6}$. Alors $t = \left(\theta^2 - 1\right)^{1/6}$ et $\mathrm{d}t = \frac{2\theta}{6(\theta^2-1)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{3(\theta^2-1)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta$. Donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta}{\left(\theta^2-1\right)^{1/6}} \frac{\theta}{3\left(\theta^2-1\right)^{5/6}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta^2}{\theta^2-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta^2-1+1}{\theta^2-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1}{(\theta-1)(\theta+1)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1/2}{\theta-1} - \frac{1/2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\theta + \frac{1}{2}\ln\left(|\theta-1|\right) - \frac{1}{2}\ln\left(|\theta+1|\right)\right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \\
&= \frac{1}{3}\left[\theta + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)\right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \qquad \text{car } \theta+1 \geqslant \theta-1 > 0. \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right) - \underbrace{\frac{1}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}_{=C_1} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{\left(\sqrt{1+x^6}+1\right)\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{1+x^6-1}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)^2}{x^6}\right) - C_1 \\
&= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^3}\right) - C_1
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_+^*}$ données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{x^3}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

5. **Calcul de limites.**

5.1 On pose $u = \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x}\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-3x}}\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{1}{u^3}\sin(u) = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{1}{u^2}\frac{\sin(u)}{u}.$$

Or, en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction sinus, dérivable en 0, on a

$$\lim_{\substack{u\to0\\u>0}} \frac{\sin(u)}{u} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x}\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty\times 1 = +\infty.}$$

5.2 Pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = \mathrm{e}^{\ln(x)\ln(x) - x\ln(\ln(x))} = \mathrm{e}^{-x\ln(\ln(x))\left(1-\frac{\ln^2(x)}{x}\frac{1}{\ln(\ln(x))}\right)}.$$

Or par croissance comparée, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(\ln(x))} = 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} -x\ln(\ln(x))\left(1-\frac{\ln^2(x)}{x}\frac{1}{\ln(\ln(x))}\right) = -\infty\times(1-0) = -\infty.$$

Donc par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = 0.}$$

5.3 Posons $u = x\ln^2(x-7) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a alors pour tout $x > 7$,

$$\frac{\mathrm{e}^{x\ln^2(x-7)}}{(x+2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{e}^u}{u^2}\times\frac{x^2\ln^4(x-7)}{(x+2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{e}^u}{u^2}\times\frac{\sqrt{x}\ln^4(x-7)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3/2}}.$$

Or par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u^2} = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln^4(x-7)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3/2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\ln^2(x-7)}}{(x+2)^{3/2}} = +\infty.}$$

5.4 Posons $u = \arctan(x) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} 0^+$. Alors pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln(1+\arctan(x))}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+u)}{u}\times\frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+u)}{u}\times\frac{\arctan(x)}{x}\sqrt{x}.$$

Or en reconnaissant le taux d'accroissement en 1 de la fonction logarithme qui est bien dérivable en 1 on a

$$\lim_{\substack{u\to0\\u>0}}\frac{\ln(1+u)}{u} = \ln'(1) = 1.$$

De même on reconnait le taux d'accroissement de la fonction arctan qui est bien dérivable en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\arctan(x)}{x} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln(1+\arctan(x))}{\sqrt{x}} = 1\times1\times0 = 0.}$$

5.5 Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{3^x - 2^x}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(3)} - \mathrm{e}^{x\ln(2)}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(1 - \mathrm{e}^{-x(\ln(3)-\ln(2))}\right)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(3)}}{x\ln(3)} \times \ln(3) \times \left(1 - \mathrm{e}^{-x(\ln(3)-\ln(2))}\right).$$

Or par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x\ln(3)}}{x\ln(3)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty.$$

et comme $\ln(3) - \ln(2) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x(\ln(3)-\ln(2))} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - 2^x}{x} = +\infty \times \ln(3) \times 1 = +\infty.}$$