Interrogation de révisions 1 - Entrainement

1. **Restituer le cours.** *(Source : interrogation 14)*
   1.1 Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
   1.2 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ? (Prop II.4)
   1.3 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
   1.4 Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n. Préciser le cas $n=0$ et $n=1$.
   1.5 Enoncer l'unicité du développement limité.
2. **Sommes doubles triangulaires.** *(Source : interrogation 6)*
   2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j-1}$.
   2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (n-i)\, j$.
   2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
   2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} q^{i+j}$.
   2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^2}{2j-1}$.
3. **Equations complexes.** *(Source : interrogation 7)*
   3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5z + 7 + i = 0$.
   3.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)\, z + i - 1 = 0$.
   3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
   3.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+3i)\, z + 4 + 4i = 0$.
   3.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\,(2+i)\, z + 6 + 8i = 0$.
4. **Montrer qu'une fonction est lipschitzienne.** *(Source : interrogation 16)*
   4.1 Montrer que arccos est lipschitzienne sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
   4.2 Montrer que arctan est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   4.3 Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est lipschitzienne sur $[1\,;+\infty[$.
   4.4 Montrer que tan est lipschitzienne sur $\left[\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right]$.
   4.5 Montrer que $f : x \mapsto \ln(5x+2)$ est lipschitzienne sur $[0\,;1]$.
5. **Calculer une image.** *(Source : interrogation 23)*
   Pour chacune des questions suivantes, on commencera par démontrer que f ou φ est linéaire.
   5.1 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   5.2 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \frac{M + {}^tM}{2} \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   5.3 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ et préciser si f est surjective.
   5.4 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (t \mapsto \mathrm{e}^t f(t)) \end{array}$ et préciser si φ est surjective.
   5.5 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est surjective.