Interrogation de révisions 2 - Entrainement

1. **Restituer le cours.** *(Source : interrogation 9)*
   1.1 Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
   1.2 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.3 Enoncer avec toutes les hypothèses, la croissance de l'intégrale.
   1.4 Enoncer le théorème d'intégration par parties.
   1.5 Enoncer le théorème de changement de variable.
2. **Compléter une famille libre en une base.** *(Source : interrogation 21)*
   2.1 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x-2y+3z-3t=0 \\ -x+y+z-t=0 \end{array} \right\}$.
   2.2 Justifier que $\mathscr{L} = \left(1+2X+3X^2+4X^3, 1-X+X^2+X^3\right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   2.3 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{r} 2a+4b+4c-3d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{array} \right\}$.
   2.4 Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{k} ie_i$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.
   2.5 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x+2z-2t=0 \\ x+2y+3z-5t=0 \end{array} \right\}$.
3. **Formule des probabilités totales.** *(Source : interrogation 26)*
   3.1 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 40% préfère le rugby et 15% le basket. Parmi ceux qui aiment le rugby, 10% le pratique. Parmi ceux qui aiment le basket, 85% le pratique et parmi ceux qui aiment le foot, 90% n'y jouent pas. Sachant qu'un individu pratique au plus un sport et que ce sport, s'il est pratiqué, est nécessairement celui qu'il préfère, quelle est la probabilité qu'un individu pratique l'un de ces trois sports ?
   3.2 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 20% choisissent le foot et 25% choisissent le basket. Parmi ceux qui préfèrent le foot, 15% aiment les maths. Parmi ceux qui préfèrent le rugby, 55% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le basket, 45% n'aiment pas les maths. Sachant qu'un individu aime les maths, quelle est la probabilité qu'il préfère le rugby ?
   3.3 Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules vertes. On tire de façon équiprobable une boule. Si la boule est rouge on lance un dé à 4 faces (tétraèdre) si la boule est bleue, on lance un dé à six face (un cube) et si la boule est verte on lance un dé à 8 faces (octaèdre). Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 4 ?
   3.4 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 60% des individus préfèrent le rugby et 10% préfère le basket. Parmi ceux qui choisissent le rugby, 40% n'aiment pas les maths. Parmi ceux qui choisissent le basket, 85% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le foot, 25% n'aiment pas les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime les maths ?
   3.5 On tire une carte dans un jeu de 52 carte. Si l'on obtient un pique, on lance un dé à 8 faces (octaèdre), si l'on obtient un roi (sauf le roi de pique), on lance un dé à 12 faces (dodécaèdre), sinon, on lance un dé à 20 faces (icosaèdre). Quelle est la probabilité d'avoir tiré un pique sachant que le résultat du dé est égal à 1 ?
4. **Savoir déterminer une solution particulière.** *(Source : interrogation 11)*
   4.1 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{2t}$.
   4.2 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 9\,\mathrm{e}^{t}$.
   4.3 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t^3 - 6t + 4$.
   4.4 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 5\,\mathrm{e}^{2t}$.

4.5 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 4y(t) = (t+1)\cos(2t)$.

5. **Applications géométriques.** *(Source : interrogation 7)*

5.1 Soient $A(1+i)$, $B(4+3i)$ et $C\left(\frac{5}{2}i\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.

5.2 Soient $A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(2\sqrt{3}\right)$ et $C\left(1+\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.

5.3 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Soient $A((1+i)z)$, $B(1+iz)$ et $C(z-i)$. Montrer que A, B et C sont alignés.

5.4 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-i\}$. Soient $A((1+i)z)$, $B(iz-i)$ et $C(z-1)$. Montrer que A, B et C sont alignés.

5.5 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. A quelle transformation du plan correspond f ?

5.6 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. A quelle transformation du plan correspond f ?

5.7 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. A quelle transformation du plan correspond f ?

5.8 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$. A quelle transformation du plan correspond f ?

5.9 Soit $f : z \mapsto (1+i)z$. A quelle transformation du plan correspond f ?