Exercice de Révision
Hiver 07

Exercice 1. [*Solution*] On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 < u_0 < v_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On note u la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et v la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
5. En déduire les valeurs de u et v.

Solution de l'exercice 1. [*Enoncé*]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « u_n et v_n existent et sont strictement positifs » . Procédons par récurrence.
   Initialisation. Si $n = 0$, alors u_0 et v_0 existent et sont strictement positifs. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n et v_n existent et sont strictement positifs. Donc $u_n + v_n > 0$ et ainsi, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ existe et de même $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}$ existe. De plus comme $u_n^2 > 0$, $u_n + v_n > 0$ et $v_n^2 > 0$, on en déduit également que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ existent et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n > 0$ et donc $u_n + v_n > u_n$. Donc $\frac{1}{u_n+v_n} < \frac{1}{u_n}$. Puisque $u_n^2 > 0$, on en déduit que $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} < \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par symétrie des hypothèses, on démontre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Conclusion,
   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont strictement décroissantes.}}$$
3. On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclusion,
   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}}$$
   On note u la limite de u et v la limite de v.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} - \frac{v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{u_n+v_n} = \frac{(v_n - u_n)(v_n+u_n)}{u_n+v_n} = v_n - u_n.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\text{La suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$
5. Par la question précédente, on obtient que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = v_0 - u_0.$$
   Donc par passage à la limite,
   $$v - u = v_0 - u_0.$$
   De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $u \geqslant 0$ et donc $v = v_0 - u_0 + u \geqslant v_0 - u_0 > 0$. Dès lors, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u + v \geqslant v > 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$. Donc par passage à la limite,
   $$\begin{aligned} u = \frac{u^2}{u+v} \quad &\Leftrightarrow \quad u^2 + uv = u^2 \qquad \text{car } u+v > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad uv = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u = 0 \qquad \text{car } v > 0. \end{aligned}$$
   Par suite, puisque $v = v_0 - u_0 + u$, on en déduit que $v = v_0 - u_0$. Conclusion,
   $$\boxed{u = 0 \qquad \text{et} \qquad v = v_0 - u_0.}$$