Exercice de Révision
Hiver 12

Exercice 1. [*Solution*] Soit $\mathscr{F} = \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$.

1. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ?
2. Déterminer une base de F.
3. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 1. [*Enoncé*]

1. On sait que les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre d'une famille. De plus on a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= \left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}\right)\\ &\sim \left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_2\leftarrow C_2-3C_1\\C_3\leftarrow C_3-2C_1\end{array}.\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{F}'=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\right)$. Puisque les deux dernières matrices sont égales, on ne déduit que $\mathscr{F}'$ est liée. Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère lié. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est liée i.e. n'est pas libre.}}$$

2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc comme dans la question précédente, on a

$$F=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{F}\right)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{F}'\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\right).$$

Puisque $C_3=C_2$, on peut l'ôter.

$$F=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&3/2\end{bmatrix}\right) \qquad C_2\leftarrow -\frac{1}{2}C_2.$$

Posons $\mathscr{B}_F=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&3/2\end{bmatrix}\right)$. Par ce qui précède $\mathscr{B}_F$ engendre F. De plus les deux matrices ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&3/2\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } F.}$$

3. *On note qu'il manque des pivots dans les coordonnées 3 et 4 dans la base canonique.* Posons $\mathscr{B}_G=\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$. En tant que sous-famille de la base canonique $\mathscr{B}_G$ est libre. Posons $G=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right)$. Donc $\mathscr{B}_G$ est libre et engendre G donc est une base de G. Posons enfin $\mathscr{B}=\mathscr{B}_F\cup\mathscr{B}_G$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \left(\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&3/2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\\ &\sim \left(\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_1\leftarrow C_1-C_3-2C_4\\C_2\leftarrow C_2-C_3-\frac{3}{2}C_4\end{array}\\ &\sim \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) && C_1\leftarrow C_1-2C_2.\end{aligned}$$

On obtient alors la base canonique qui est libre et génératrice. Or les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère libre ni le caractère générateur. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. Ainsi,

- $\mathscr{B}_F$ est une base de F

- $\mathscr{B}_G$ est une base de G
- $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : F \oplus G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,.}$$