Exercice de Révision
Printemps 04

Exercice 1. [*Solution*] Soit $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)$ au voisinage de 0.
2. En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

Solution de l'exercice 1. [*Enoncé*]

1. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(x)\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) - \sin(x)\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = 2\,\mathrm{sh}(x)\cos(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\sin(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} 2\left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - x^3 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - 2x + \frac{x^3}{3} - x^3 + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4x^3}{3}.}$$

2. Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n} \to 0$. Donc par la question précédente,

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{4}{3n^3} < 0$ et est donc de signe constant. Donc par le théorème sur les équivalents, on en déduit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} -\dfrac{4}{3n^3}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{4}{3n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$