# TD 13
# Ensembles et applications

## Ensembles

**Exercice 1**. Soient $E$ un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$
2. $A \cap B = A \cup B \quad \Rightarrow \quad A = B$
3. $A \cup B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A \subset C$

**Exercice 2**. Soit $E$ un ensemble et $a \in E$. Déterminer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$.

**Exercice 3**. Soit $E$ un ensemble. Montrer par contraposition les assertions suivantes.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \quad \Rightarrow \quad A = B,$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad ([A \cap B = A \cap C] \wedge [A \cup B = A \cup C]) \quad \Rightarrow \quad B = C.$

**Exercice 4**. Soient $E$ un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

**Exercice 5**. Soient $E$ un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $C_E(A) \setminus C_E(B) = B \setminus A$.

**Exercice 6**. Déterminer chacun des ensembles suivants.

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right], \qquad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right]$$

$$I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], \qquad I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$$

**Exercice 7**. Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

## Applications

**Exercice 8**. Soient $f$ et $g$ les éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

**Exercice 9**. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1)\ h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array} \qquad 2)\ k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

**Exercice 10**. Soient $A, B$ deux parties de $E$. Démontrer que les fonctions suivantes sont des fonctions caractéristiques et déterminer l'ensemble qu'elles caractérisent.

1. $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
4. $1 - \mathbb{1}_A$
5. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
6. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

**Exercice 11**. Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $A \subseteq E$.

1. Montrer que si $f$ est injective alors $f(C_E(A)) \subset C_F(f(A))$.
2. Montrer que si $f$ est surjective alors $C_F(f(A)) \subset f(C_E(A))$.

**Exercice 12**. Soient $f$ une application de $E$ dans $F$ et $A \subseteq E$, $B \subseteq F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

**Exercice 13**. Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$. Démontrer les assertions suivantes.

1. Si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective alors $g$ est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective alors $f$ est surjective.

**Exercice 14**. Soit $E$ un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E)$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective.

**Exercice 15**. Soit $X$ un ensemble. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{F}(X, \{0, 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est bijective.

**Exercice 16**. Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors $f, g$ et $h$ le sont également.

**Exercice 17**. Soient $A, B \subset E$ et $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B);\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit bijective. Préciser dans ce cas $f^{-1}$.

**Exercice 18**. Soit un ensemble $E$ et deux parties $A$ et $B$ de $E$. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties $A$, $B$, $C$ de $E$ on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie $X$ de $E$ telle que pour toute partie $A$ de $E$, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie $A$ de $E$, il existe une partie $A'$ de $E$ et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

## Relations d'équivalence

**Exercice 19**.

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :
$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b' = b + a'.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalences.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et la relation :
$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \qquad \Leftrightarrow \qquad pq' = p'q.$$

**Exercice 20**. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \ \Leftrightarrow\ y = y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 21**. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence. Préciser, pour $x$ fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de $x$.

**Exercice 22**. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une matrice élémentaire $E$ telle que $EA = B$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de $I_n$ ?
3. Déterminer le nombre de classes d'équivalence possibles.

**Exercice 23**. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $A\mathcal{R}B \quad \Leftrightarrow \quad \exists P \in \mathscr{G}L_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de $I_n$ ?
3. Montrer que la trace est constante sur chaque classe d'équivalence.

**Exercice 24**. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f\mathcal{R}g \ \Leftrightarrow\ f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que deux éléments d'une même classe d'équivalence ont la même limite.
3. Montrer que la réciproque est fausse.