TD 15
Limite, continuité, dérivation

Limite, continuité

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. Montrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

Exercice 4. Etudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
3. $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1}$

Exercice 5. Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2012} - x^{2011} = 1$ sur $I = [-1, 1]$
2. $\ln(x) = \frac{x^2-5}{x+1}$ sur $I = [1, 10]$
3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0, 1]$
4. $\mathrm{e}^x = 2 + x$ sur $I = [\ln(2), 2\ln(2)]$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 7. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante, montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9. Le but de cet exercice et de prouver que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas strictement monotone. C'est à dire qu'il existe $x_1, y_1, x_2, y_2 \in I$ avec $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$ tel que

$$f(x_1) \geqslant f(y_1) \qquad \text{et} \qquad f(x_2) \leqslant f(y_2)$$

Montrer que la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure

Exercice 10. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive qu'on notera u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$
3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite que l'on notera l.
6. Déterminer la limite de $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire la valeur de l.

Exercice 11. On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, que l'on précisera.

Exercice 12. Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 13. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $] - 1, 1[$.
2. Déterminer une expression de f^{-1}.

Dérivation

Exercice 18. Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^3}{e^x-1}$.

1. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. La fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = g(x^2)$$

Exercice 21. Calculer de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 23. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 25. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que

$$\forall x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$$

1) Montrer que $g(a) \neq g(b)$

2) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3) On suppose que $\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ où $l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l$$

4) Application : calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 26. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis

1. $\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$
2. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\operatorname{ch}(x+1)} - \sqrt{\operatorname{ch}(x)}$

Exercice 27. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}$$

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}$. Montrer que $L = 0$.

Exercice 29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$ avec $a \in]0,1[$. On pose $f : x \mapsto \cos(x)$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe l sur $]0,1[$. Quelle est la limite possible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que la fonction f est lipschitzienne sur $]0,1[$ de rapport k avec $0 < k < 1$.
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - l| \leqslant (\sin(1))^n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
6. Montrer que $\sin(1) \leqslant 0,9$ et en déduire une valeur de n à partir de laquelle u_n est une approximation de l à 10^{-3} près.