



TD4 Calculs réels

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6}.$$

$$2. B = \frac{\frac{\frac{2}{3} + 2}{4} - \frac{5}{6} - \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$3. C = (\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}).$$

$$4. D = \frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}.$$

$$5. E = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3+1}}.$$

$$6. F = \frac{\left(\frac{11}{12}\right)}{\left(\frac{4}{4}\right)}.$$

$$7. G = \frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}.$$

$$8. H = \left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes.

$$1. A = (x^2 - 2)^2. \quad 2. B = (3x + 1)^4. \quad 3. C = (3x + 2)^7.$$

$$4. D = (2x^2 - x + 1)^2. \quad 5. E = (x^2 + 2x + 2)^3. \quad 6. F = (x + y + z + t)^2.$$

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

$$1. A = 2x^2 - 12x + 18. \quad 2. B = 4x^2 - 16.$$

$$3. C = (2x - 6)(x + 2) - (x + 1)(x - 3) + 2x(3 - x).$$

$$4. D = (2x + 1)^3 + (2x + 1)^2 + 2x + 1. \quad 5. E = (x + 1)^2 - 4x.$$

$$6. F = x^3 + 6x^2 + 14x + 12. \quad 7. G = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$$

$$8. H = x^4 - 2x^2 - 3. \quad 9. I = x^3 - 1.$$

$$10. J = x^3 + 1. \quad 11. K = x^4 + 1.$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ dont on précisera à chaque fois les valeurs possibles pour que les expressions soient bien définies. Simplifier les expressions suivantes.

$$1. A = \sqrt{2 + \sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}.$$

$$2. B = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{12 + \sqrt{18}}}.$$

$$3. C = \sqrt{a + 1 - 2\sqrt{a}} + \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a}}.$$

$$4. D = \sqrt{(a + 1)^2 - 4a} + \sqrt{(a - 1)^2 + 4a}.$$

$$5. E = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}.$$

$$6. F = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$$

$$7. G = \sqrt{1 + 2017\sqrt{1 + 2018 \times 2020}} \quad \text{Indication : poser } X = 2019.$$

$$8. H = (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{9 - 5\sqrt{3}} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{9 + 5\sqrt{3}}.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Simplifier les calculs suivants.

$$1. A = \sqrt[3]{5^{12}}. \quad 2. B = \sqrt[4]{27^4 \sqrt{3}}. \quad 3. C = \sqrt[5]{a^3 \sqrt[3]{a}}.$$

$$4. D = \sqrt[4]{8^4 \sqrt{2}}. \quad 5. E = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{9}}. \quad 6. F = \sqrt{12} \sqrt{3}.$$

$$7. G = \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{4}}. \quad 8. H = \sqrt[8]{81} \sqrt[8]{27} \sqrt[8]{3}. \quad 9. I = \sqrt[14]{4^7}.$$

$$10. J = \sqrt{\sqrt{16}}. \quad 11. K = \sqrt[7]{\sqrt{7^7}}. \quad 12. L = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}}.$$

Exercice 6. Pour chacune des fractions suivantes, décrire l'ensemble des valeurs possibles dans \mathbb{R} des paramètres puis rendre le dénominateur rationnel.

$$1. A = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}. \quad 2. B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}}. \quad 3. C = \frac{1}{\sqrt[3]{2-1}}.$$

$$4. D = \frac{1}{\sqrt[3]{2+2}}. \quad 5. E = \frac{1}{\sqrt[3]{2-1}}. \quad 6. F = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}.$$

Exercice 7. Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

$$1. x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0. \quad 2. 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$3. (x - 1)(x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x - 2)(x + 1).$$

$$4. x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0. \quad 5. 6x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

$$6. 6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0. \quad 7. x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$8. x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0. \quad 9. e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$$

$$10. e^{2x} + 5e^x + 6 = 0. \quad 11. e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$$

$$12. \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0. \quad 13. \ln^2(x) - 2\ln(x) + 3 = 0.$$

$$14. 4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0.$$

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes d'équations suivants.

$$1. \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + z = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x + 4y - 5z = 7 \\ 3x - 5y + 3z = -1 \\ x + 3y - 7z = 2 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$



Exercice 9. Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2. $x^4 + x^2 - 1 > 0$
3. $-2x^2 + 2x - 3 \geq 0$
4. $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$
5. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 > 0$
6. $6x^4 - 17x^3 - 13x^2 + 33x - 9 \leq 0$
7. $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$
8. $x \geq \frac{1}{x}$
9. $e^{2x} - 2e^x - 8 > 0$
10. $e^{2x} + 6e^x + 8 \leq 0$
11. $e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0$
12. $\ln^2(x) - 7\ln(x) + 12 \geq 0$

Exercice 10. Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $|x + 3| = 5$
2. $|x + 3| \leq 5$
3. $|2x - 5| = |x^2 - 4|$
4. $|4 - x| = x$
5. $|x^2 + x - 3| = |x|$
6. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$
7. $x|x| = 3x + 2$
8. $x + |x| = \frac{2}{x}$
9. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$
10. $x + 2 < |2x - 5|$
11. $|2x - 4| \leq |x + 2|$
12. $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$
13. $|2x - 4| \geq |x^2 - 4|$
14. $\frac{x}{x+1} \leq |2x + 1| + 1$
15. $x + \frac{1}{x} \leq |x + 4| + 3$
16. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$
17. $|x + 3| > |x^2 - 3|$
18. $|x + 2| \geq \frac{1-x}{1+x}$

Exercice 11. Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x + 5 = \sqrt{x + 11}$
2. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$
3. $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$
4. $x + 3 \leq \sqrt{x + 5}$
5. $\sqrt{x^2 - 1} \leq 2 - x$
6. $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6$
7. $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$
8. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$
9. $\left(\frac{2x}{1 - \sqrt{1 + 2x}}\right)^2 < 2x + 9$
10. $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$
11. $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$
12. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
13. $\sqrt{6 - x} + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{4 - 3x}$

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$. On pose $X = \sqrt[4]{41 + x}$ et $Y = \sqrt[4]{41 - x}$.

1. A l'aide des valeurs de $X + Y$ et $X^4 + Y^4$, déterminer les valeurs possibles de XY .
2. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x .

Exercice 13. Pour chacune des équations ou inéquations, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $\sqrt{|x - 3|} = |x - 1|$
2. $\sqrt{|x - 3|} \leq x - 1$
3. $\sqrt{|x^2 - 4|} \leq |x - 1|$
4. $\sqrt{|x + 2|} \leq |x - 10|$
5. $\sqrt{1 - 2x} = |x + 7|$

Exercice 14. Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

On pose $u = \sqrt{x^2 - m}$ et $v = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Montrer que $v^2 - u^2 = m - 1$ et que $4v^2 + 4uv = m$.
2. En déduire, suivant les valeurs de m , l'ensemble des réels x solutions.

Exercice 15. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. $\forall a, b \in [0; 1], a^2 + b^2 - ab \leq 1$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, 1 + \sqrt{ab} \leq \sqrt{1 + a}\sqrt{1 + b}$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Exercice 16. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, 1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 17. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$.
4. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |x| \leq |\tan(x)|$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| \leq |x|$.

Exercice 18. Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ et que pour tout $x \in [\frac{1}{2}; 0], x - x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - \sin(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$.