Chapitre XIV : Limite, continuité, dérivation

I Limite

I.1 Définition

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R}$ auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$.

Définition I.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide (contenant au moins deux points distincts de $\mathbb{R}$). On dit que I est **un voisinage** de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $a \in I$ ou si $a = \sup(I)$ ou si $a = \inf(I)$.

Exemple 1 :

- Si $a = +\infty$, les voisinages de $+\infty$ sont les intervalles $[A; +\infty[$ ou $]A; +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $\eta > 0$, l'intervalle $[a - \eta; a + \eta]$ est un voisinage de a.

Définition I.2

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ tel que I soit un voisinage de a et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a, noté

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x - a| \leqslant \eta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

Définition I.3

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que I soit un voisinage de a et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On définit également $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dans les cas suivants.

- Si $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$. $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \ \Rightarrow\ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M.$
- Si $a = -\infty$ et $l \in \mathbb{R}$. $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leqslant A \ \Rightarrow\ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $l = -\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M.$
- Si $a = +\infty$ et $l = +\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M.$
- Si $a = +\infty$ et $l = -\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M.$
- Si $a = -\infty$ et $l = +\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M.$
- Si $a = -\infty$ et $l = -\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M.$

Remarque 2 :

- Il est possible dans chacune des assertions de remplacer une inégalité large ou les deux par une inégalité stricte.
- On peut résumer ces définitions à l'aide d'une seule : pour tout voisinage $\mathcal{V}_l$ de $l \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_a$, on a $f(x) \in \mathcal{V}_l$.

Interprétation : quitte à prendre x suffisamment proche de a, il est possible d'avoir $f(x)$ aussi proche que voulu de l. Cf dessins faits en classe.

Théorème I.4 (Unicité de la limite)

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, $f : I \to \mathbb{R}$. Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Démonstration. Soient $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$. On va démontrer que $l = l'$. Traitons le cas où l, l' et a sont réels. Les cas où l, l' ou a sont infinis se démontrent de façon analogue. On peut aussi traiter tous les cas en même temps en utilisant la notion de voisinage. Procédons par l'absurde et supposons que $l \neq l'$. Premier cas $l' < l$. Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{3}$. On a donc $\varepsilon > 0$. Donc par définition de la limite, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x-a| \leqslant \eta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier pour tout $x \in [a-\eta_1; x+\eta_1] \cap I$, $f(x) \geqslant l - \varepsilon = l - \frac{l-l'}{3}$. D'autre part, il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x-a| \leqslant \eta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l'| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier pour tout $x \in [a-\eta_2; x+\eta_2] \cap I$, $f(x) \leqslant l' + \varepsilon = l' + \frac{l-l'}{3}$. On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Si $x \in [a-\eta; x+\eta] \cap I$ alors $x \in [a-\eta_1; x+\eta_1] \cap I$ et $x \in [a-\eta_2; x+\eta_2] \cap I$. Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{cases} f(x) \geqslant l - \frac{l-l'}{3} = \frac{2l+l'}{3} = \frac{l}{3} + \frac{l+l'}{3} \\ f(x) \leqslant l' + \frac{l-l'}{3} = \frac{l+2l'}{3} = \frac{l'}{3} + \frac{l+l'}{3}. \end{cases}$$

Donc on remarque que $f(x) \leqslant \frac{l'}{3} + \frac{l+l'}{3} < \frac{l}{3} + \frac{l+l'}{3} \leqslant f(x)$ en particulier $f(x) < f(x)$ ce qui est absurde. On démontre de la même façon que $l < l'$ est aussi absurde et que donc $l \neq l'$ est absurde. Par conséquent $l = l'$. □

Exemple 3 :

- Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet 0 comme limite en 0.
- Montrer que la fonction partie entière n'a pas de limite en 1.

Définition I.5

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Si $a \neq +\infty$, on appelle limite à droite de f en a la limite de la restriction $f_{|I \cap]a;+\infty[}$ en a, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou parfois $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
2. Si $a \neq -\infty$, on appelle limite à gauche de f en a la limite de la restriction $f_{|I \cap]-\infty;a[}$ en a, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou parfois $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Exemple 4 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite à droite et une limite à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ en 0.

Proposition I.6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément intérieur de I i.e. $a \in I$ mais a n'est pas une borne de I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ existe} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ existe} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a). \end{cases}$$

Exemple 5 :

1. La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
2. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais admet une limite en 0 :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$
3. La fonction sinus cardinal $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet une limite en 0.
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1.$$
4. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

I.2 Propriétés élémentaires sur les limites

Proposition I.7 (Opérations algébriques)

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et g deux fonctions définies sur I et $(l, l') \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = l',$$

alors

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = l + l'$, si $l + l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda l$, si λl existe dans $\overline{\mathbb{R}}$,
3. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$,
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = ll'$, si ll' existe dans $\overline{\mathbb{R}}$,
5. si $l \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$,
6. si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$, si $\frac{l}{l'}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

On rappelle ci-dessous, les différents cas de figures pour la somme et le produit de limites.

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Proposition I.8 (composition)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, J un voisinage de b, $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to b} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = b,$$

alors $f \circ g$ est bien définie sur un voisinage de a et

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = l.$$

Exemple 6 : On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{u \to 0} \mathrm{e}^u = 1$, par conséquent

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \to 0} \mathrm{e}^u = 1.$$

Anti-Proposition I.9

- L'assertion suivante est FAUSSE !

$$\lim_{x \to a} g(x) = l' \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + l',$$

car il se peut que d'une part que $\lim_{x \to a} f(x) + l'$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ existe ou que $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ existe.
- De même pour le produit ou le quotient.
- De façon générale, il est interdit de remplacer dans l'expression d'une fonction un seul terme par sa limite.

Exemple 7 :

- Si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = 0$ existe alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \infty$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Si $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto x$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = +\infty$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Si $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - (1+2x)}{x}$. Même si $\lim\limits_{x\to 0} 1+2x = 1$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

En effet, puisque $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1+x+o(x)-1-2x}{x} \underset{x\to 0}{=} -1 + o(1) \underset{x\to 0}{\to} -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

Proposition I.10

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent des limites en a. On a les implications suivantes

$$\begin{array}{lcl} \forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x) & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x) \\ \forall x \in I, \quad f(x) < g(x) & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x). \end{array}$$

Démonstration. On suppose par exemple $a = +\infty$ et $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ et $l' = \lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrons que $l \leqslant l'$. Procédons par l'absurde et supposons que $l > l'$ et posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{3}$. Par définition des limites, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{l} \forall x \in [A; +\infty[\cap I, \quad f(x) \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon] \\ \forall x \in [B; +\infty[\cap I, \quad g(x) \in [l'-\varepsilon; l'+\varepsilon] \end{array}$$

Donc avec $C = \max(A, B)$, on obtient que pour tout $x \in [C; +\infty[\cap I = [A; +\infty[\cap [B; +\infty[\cap I$,

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant l - \varepsilon = l - \frac{l-l'}{3} = \frac{2l+l'}{3} \\ g(x) &\leqslant l' + \varepsilon = l' + \frac{l-l'}{3} = \frac{l+2l'}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{2l+l'}{3} = \frac{l}{3} + \frac{l+l'}{3} > \frac{l'}{3} + \frac{l+l'}{3} = \frac{l+2l'}{3}$ car on a supposé $l > l'$. Par conséquent pour tout $x \in [a-\eta; a+\eta] \cap I$,

$$g(x) \leqslant \frac{l+2l'}{3} < \frac{2l+l'}{3} \leqslant f(x),$$

ce qui contredit l'hypothèse que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$. On a donc montré que $l \leqslant l'$. □

Proposition I.11

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si la limite de f en a existe dans $\mathbb{R}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

Démonstration. Traitons le cas $a \in \mathbb{R}$. Posons $l = \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\eta; a+\eta] \cap I, \quad f(x) \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$

Notamment pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta; a+\eta] \cap I$,

$$l - 1 \leqslant f(x) \leqslant l + 1.$$

Donc la fonction f est bien bornée sur $J = [a-\eta; a+\eta] \cap I$ qui est bien un voisinage de a. □

I.3 Théorèmes d'existence de limites

Théorème I.12 (comparaison)

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g et h trois fonctions $I \to \mathbb{R}$.

1. **Encadrement.** On suppose que pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. On suppose de plus que g et h admettent une limite commune dans $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors f admet une limite en a et de plus
$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$
2. **Majoration.** On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et que g diverge vers $-\infty$ en a : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors f admet une limite a qui est $-\infty$:
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$
3. **Minoration.** On suppose que pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$ et que g diverge vers $+\infty$ en a : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors f admet une limite a qui est $+\infty$:
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Démonstration. Démontrons le premier point et supposons par exemple $a = -\infty$. On suppose que pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$. Donc par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in]-\infty; A[\cap I, \quad g(x) \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon],$$
$$\forall x \in]-\infty; B[\cap I, \quad h(x) \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$
En particulier, en posant $C = \min(A, B)$, on a pour tout $x \in]-\infty; C[\cap I =]-\infty; A[\cap]-\infty; B[\cap I$,
$$g(x) \geqslant l - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad h(x) \leqslant l + \varepsilon\,.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-\infty; C[\cap I$,
$$l - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon\,.$$
On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-\infty; C[\cap I$, $f(x) \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$ ce qui signifie que f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

□

Corollaire I.13

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant g(x)$. Alors
$$\lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Théorème I.14 (Limite monotone)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est croissante sur I. Alors f admet une limite (éventuellement infinie) à droite en a et une limite à gauche en b et de plus
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf_{x \in I} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Plus précisément

1. Si f est majorée sur I alors sa limite à gauche en b est finie, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Si f n'est pas majorée sur I alors sa limite à gauche en b est $+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.
3. Si f est minorée sur I alors sa limite à droite en a est finie, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \in \mathbb{R}$.
4. Si f n'est pas minorée sur I alors sa limite à droite en a est $-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.

Démonstration. Démontrons le premier point. L'ensemble $A = \{ f(x) \mid x \in I \} = f(I)$ est par hypothèse majoré. Il est de plus non vide car f est bien définie sur I. Donc on sait que $\sup_{x\in I} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Notons-la $l = \sup_{x\in I} f(x)$. Par la caractérisation de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $l - \varepsilon \leqslant y$. Par définition de A, il existe $x_0 \in I$ tel que $y = f(x_0)$. Donc $l - \varepsilon \leqslant f(x_0)$. Or la fonction f est croissante sur I donc pour tout $x \in [x_0; b[\subseteq I$ (inclusion découlant du fait que I est un intervalle) on a $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant l - \varepsilon$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = b - x_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]b - \eta; b[$, on a $f(x) \geqslant l - \varepsilon$. Or par définition de $l = \sup_{x\in I} f(x)$ on sait également que $f(x) \leqslant l$. Par suite, pour tout $x \in]b - \eta; b[$,

$$f(x) \in [l - \varepsilon; l] \subseteq [l - \varepsilon; l + \varepsilon].$$

Ceci démontre bien que la limite à gauche de f en b existe et vaut $l = \sup_{x\in I} f(x)$. □

Théorème I.15 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a.
2. Pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$ alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 8 :

- Ce théorème est très utile pour relier les résultats sur les fonctions et les résultats sur les suites.
- Il est également très utile en pratique pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite.

Exemple 9 : Démontrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

II Continuité

Soit I un intervalle. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I c'est-à-dire l'ensemble $I \setminus \{\inf(I); \sup(I)\}$. Par exemple si $I =]3; 18]$ alors $\mathring{I} =]3; 18[$.

II.1 Définition

Définition II.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue en** $a \in \mathring{I}$ si f admet une limite finie en a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad (|x - a| \leqslant \eta) \quad \Rightarrow \quad (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

- On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point a de I. On note alors $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 10 : Si f est continue en a, nécessairement f est définie en a et donc sa limite quand x tend vers a vaut $f(a)$.

Définition II.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.

- On dit que f est **continue à droite** en a si f admet une limite à droite en a qui coïncide avec $f(a)$:

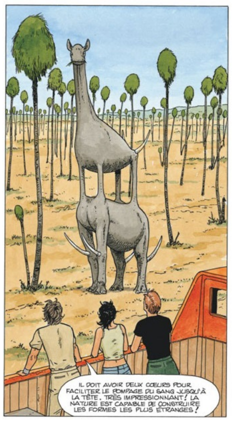
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \text{ existe et } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a).$$

- On dit que f est **continue à gauche** en a si f admet une limite à gauche en a qui coïncide avec $f(a)$:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \text{ existe et } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a).$$

Exemple 11 :

1. Pour $a \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue à droite en a mais n'est pas continue à gauche en a.
2. On définit f de la façon suivante :



$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Proposition II.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite en a et est continue à gauche en a.

Proposition II.4 (Rappel)

La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) et la composition (de fonctions définies sur des intervalles adaptés) de fonctions continues en un point a respectivement sur un intervalle I est une fonction continue en a respectivement sur I.

Remarque 12 : Puisque l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel (et même un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$).

Proposition II.5 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est continue en a.
2. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I.
   Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarque 13 : Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, pour affirmer que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$ il faut justifier que f est continue en l (ou sur un intervalle contenant l).

Exemple 14 : Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$!

Définition II.6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe. On définit alors

$$\forall x \in I,\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est alors continue en a.

Remarque 15 : En pratique on note encore f le prolongement par continuité de f.

Exemple 16 :

- La fonction $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0.
- La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est prolongeable par continuité en 0.
- La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

II.2 Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue

Algorithme de dichotomie.
Soit $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$. On suppose que $f(a) < 0 < f(b)$ et on cherche $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.
On construit l'algorithme suivant dans Python :

```
def dichoto(a,b,f,N):
    an=a
    bn=b
    for i in range(N):
        c=(an+bn)/2
        z=f(c)
        if z<0:
            an=c
        if z==0:
            an=c
            bn=c
        if z>0:
            bn=c
    return c

```

Démontrons que cet algorithme retourne une valeur approchée de c. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $a_0 = a$, $b_0 = b$ puis par récurrence par

- $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$,
- $a_{n+1} = b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$,
- $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$.

On démontre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b.$$

En particulier on vérifie dans le même temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n+b_n}{2} \in [a;b]$ et que donc les suites sont bien définies.

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b donc converge vers un réel $l \in [a;b]$. De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a donc converge vers un réel $l' \in [a;b]$. De plus, on peut également démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}.$$

Donc par passage à la limite, on en déduit que $l = l'$. Notons c ce réel.
NB : nous verrons dans le prochain chapitre que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes et par un résultat général, convergent vers une limite commune.
Notez que par monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $c \in [a;b]$. Or la fonction f est continue sur $[a;b]$ donc en c. Donc par la caractérisation séquentielle de la continuité on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n = c \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = c \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = c \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = c. \end{aligned}$$

Or par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$. Donc par passages à la limite, il vient que $f(c) \geqslant 0$ et $f(c) \leqslant 0$ i.e. $f(c) = 0$. Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Lemme II.7

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$. Alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque 17 : On a le même résultat si $f(a) > 0 > f(b)$, il suffit de considérer $g = -f$ pour se ramener au cas précédent.

Exercice 18 : Modifier le programme Python précédent en remplaçant le paramètre N par un réel p qui correspond à la précision du résultat souhaité i.e. tel que le programme retourne une valeur de c telle que $|c - c_{theorique}| \leqslant p$. On pourra s'aider de l'inégalité $b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$ que l'on pourra démontrer.

Théorème II.8 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $a < b$ deux réels de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$. Alors pour tout $y \in [f(a); f(b)]$ (ou $[f(a); f(b)]$ si $f(a) > f(b)$) il existe $c \in [a;b]$ tel que $y = f(c)$:

$$\forall y \in [f(a); f(b)], \ \exists c \in [a;b], \ y = f(c).$$

Démonstration. Appliquer le lemme précédent pour la fonction $g = f - y$. □

Remarque 19 : Si $y \in]f(a); f(b)[$ alors $c \in]a;b[$.

Corollaire II.9

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout $(a,b) \in I^2$, $[a;b] \subseteq I$. Soit f une fonction continue sur I. Montrons que $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(\alpha,\beta) \in J^2$. Par définition de $J = f(I)$, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Montrons que $[\alpha;\beta] \subseteq J$. Soit $\gamma \in [\alpha;\beta] = [f(a);f(b)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a;b]$ tel que $\gamma = f(c)$ et puisque que $c \in [a;b] \subseteq I$, on en déduit que $\gamma = f(c) \in f(I) = J$. On a donc montré que $[\alpha;\beta] \subseteq J$ et ce pour tout $(\alpha,\beta) \in J^2$. Par conséquent, J est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$. $\square$

Théorème II.10 (de la bijection)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I et **strictement monotone** sur I. Alors

1. la fonction f est une bijection de I dans $J = f(I)$, en particulier, $\forall y \in J$, $\exists! x \in I$ tel que $y = f(x)$,
2. sa réciproque f^{-1} est continue sur $J = f(I)$
3. sa réciproque f^{-1} est strictement monotone sur J, de même monotonie que f
4. l'intervalle J est de même nature que I :

	I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$f(I)$	$[f(a),f(b)]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x), \right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$
$f \searrow$	$f(I)$	$[f(b),f(a)]$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Remarque 20 : Si f est continue sur I un intervalle, mais pas strictement monotone sur I, alors $J = f(I)$ est bien un intervalle mais pas nécessairement de même nature que I si I est semi-ouvert ou ouvert.
Exemple : si $f = \sin$ et $I = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right[$, alors $f(I) = [-1;1]$ est bien un intervalle mais pas de « même nature » que I.
Cependant si I est un segment, le théorème suivant assure que $J = f(I)$ est aussi un segment.

Théorème II.11 (des bornes atteintes / image d'un segment par une fonction continue)

Soient $a < b$ deux réels, $I = [a;b]$, f une fonction continue sur I. Alors f est bornée sur I et atteint ses bornes :

- $m = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$,
- il existe $u \in I$ et $v \in I$ tels que $m = f(u)$ et $M = f(v)$,
- $J = f(I) = [m;M]$.

Remarque 21 :

1. On a donc pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et pour tout $y \in [m;M]$, il existe $x \in [a;b]$ tel que $y = f(x)$.
2. Attention a priori m n'est pas l'image de a ni même de b et de même pour M.

III Dérivation

III.1 Rappels

Définition III.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta] \setminus \{a\},\ \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

  On appelle alors $\ell = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.
- La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Proposition III.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $a \in I$, alors

- la fonction f est continue en a,
- la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en a donné par :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a),$$

- la fonction f admet une tangente en a d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Définition III.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si la dérivée n-ième de f est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou parfois $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe n sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable. On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ou parfois $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $+\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 22 :

- L'ensemble $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- L'ensemble $\mathscr{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I.
- On a les inclusions suivantes : $\mathscr{C}^\infty(I) \subseteq \mathscr{C}^n(I) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{C}^1(I) \subseteq \mathscr{C}^0(I) \subseteq \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I)$.

Proposition III.4

La somme, le produit, l'inverse (lorsque la fonction en s'annule pas), le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), la composée (avec des intervalles qui concordent) de fonction dérivable, respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$ est encore dérivable, respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque 23 : On rappelle que si $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ sont dérivables, alors $f \circ g$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))\,.$$

Proposition III.5 (Formule de Leibniz)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions n fois dérivable sur I. Alors la fonction fg est dérivable sur I et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, posons Q_p : « la fonction fg est p fois dérivable et $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$. Démontrons par récurrence que pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, la proposition Q_p est vraie.

- Si $p = 0$, la proposition est immédiate car $(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} f^{(k)} g^{(0-k)}$.
- Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$ et supposons Q_p vraie. Démontrons que Q_{p+1} est alors vraie. On sait que $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, or pour tout $k \in [\![0; p]\!]$, $k \leqslant n-1$ donc $f^{(k)}$ est dérivable (car f est n fois dérivable) et $p - k \leqslant p \leqslant n-1$ donc $g^{(n-k)}$ est aussi dérivable. Donc $(fg)^p$ est aussi dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables. Autrement dit fg est $p+1$ fois dérivable. De plus :

$$\begin{aligned}(fg)^{(p+1)} = \left((fg)^{(p)}\right)' &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(f^{(k)} g^{(p-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left[\left(f^{(k)}\right)' g^{(p-k)} + f^{(k)} \left(g^{(p-k)}\right)'\right] \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k+1)} g^{(p-k)} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k+1)} \\ &= f^{(p+1)} g + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} f^{(k+1)} g^{(p-k)} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k+1)}.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $\tilde{k} = k+1$ dans la première somme :

$$(fg)^{(p+1)} = f^{(p+1)} g + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} f^{(k)} g^{(p-k+1)} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k+1)} + f g^{(p+1)}.$$

En appliquant la formule de Pascal,

$$(fg)^{(p+1)} = f^{(p+1)} g + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} f^{(k)} g^{(p-k+1)} + f g^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} g^{(p-k+1)}.$$

Donc Q_{p+1} est vraie et on a montré que pour tout $p \in [\![1; n-1]\!]$ $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$.
- Conclusion la propriété Q_p est vraie pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, notamment Q_n est vraie.

□

Définition III.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est dérivable à droite en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.
- On dit que f est dérivable à gauche en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Remarque 24 : Contrairement à la continuité, ici on ne regarde par la valeur du taux d'accroissement lorsque $x = a$ évidemment !

Proposition III.7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si

1. la fonction f est dérivable à droite en a,
2. la fonction f est dérivable à gauche en a,
3. les demi-pentes coïncident :
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

III.2 Théorème des accroissements finis

Lemme III.8

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Si a est l'abscisse intérieur d'un extremum local de f et si f est dérivable en a, alors a est un point critique de f, i.e. $f'(a) = 0$.

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que a est un extremum local de f. Si $f(a)$ est un maximum alors pour tout $u > a$, $\frac{f(u)-f(a)}{u-a} \leqslant 0$ et pour tout $v < a$, $\frac{f(v)-f(a)}{v-a} \geqslant 0$. Par passage à la limite on a par dérivée à droite $f'(a) \leqslant 0$ et par dérivée à gauche $f'(a) \geqslant 0$ et donc $f'(a) = 0$. On procède de même si $f(a)$ est un minimum.

$\square$

Théorème III.9 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a;b]$, donc d'après le théorème II.11, on sait que f est bornée et atteint ses bornes. Notons $m = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = \min_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = \min_{x\in[a;b]} f(x)$.

1. Premier cas, $f(a) = f(b) = m = M$. Alors la fonction f est constante sur $[a;b]$ et donc pour tout $c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$.
2. Deuxième cas, $m = f(a) = f(b)$ mais $M \neq f(a) = f(b)$. Donc il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = M$. Donc M est un extremum local (car maximum) de f atteint à l'intérieur de $I =]a;b[$ sur lequel f est dérivable. Par le lemme précédent, on sait que $f'(c) = 0$.
3. Troisième cas, $m \neq f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$. A nouveau, m est un extremum local de f sur $[a;b]$ atteint à l'intérieur de $I =]a;b[$ sur lequel f est dérivable. Par le lemme précédent, on en déduit que $f'(c) = 0$.

Dans tous les cas, on a bien établi l'existence de $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$\square$

Remarque 25 :

- **Graphiquement,** cela signifie que si $f(a) = f(b)$ alors le graphe de f admet une tangente horizontale entre a et b.
- **En cinématique,** cela signifie que si un mobile se déplace sur un axe et revient à son point de départ, nécessairement il a eu, au cours de sa trajectoire, un instant pour lequel sa vitesse s'est annulée.

Théorème III.10 (Identité des accroissements finis)

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors,

$$\exists c \in]a;b[, \qquad f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,.$$

Démonstration. On considère la fonction φ définie pour tout $x \in [a;b]$ par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. La fonction φ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions continues respectivement dérivables. De plus,

$$\varphi(a) = 0 = \varphi(b).$$

Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a;b[$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En particulier, $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ et on conclut que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,.$$

$\square$

Remarque 26 :

- **Graphiquement,** cela signifie que le graphe de f admet une tangente entre a et b qui est parallèle à (AB) avec $A(a; f(a)$ et $B(b; f(b))$ et dont la pente est bien donnée $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **En cinématique,** cela signifie que si un mobile a eu une vitesse *moyenne* de 100 km/h par exemple, nécessairement il a existé un moment où sa vitesse *instantanée* a été de 100 km/h.

Proposition III.11

Soient $a < b$, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. La fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur $[a; b]$ si et seulement si f' est positive (respectivement négative) sur $]a; b[$.

Démonstration. Si f est croissante sur $[a; b]$ alors le taux d'accroissement est positif et par passage à la limite, f' est positive.
Réciproquement, si f' est positive sur $]a; b[$, alors pour tout $\alpha, \beta \in [a; b]$, $\alpha < \beta$, la fonction f étant continue sur $[\alpha; \beta]$ et dérivable sur $]\alpha; \beta[$, d'après l'identité des accroissements finis, il existe $\gamma \in]\alpha; \beta[$ tel que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha).$$

Puisque $\gamma \in]a; b[$, on sait que $f'(\gamma) \geqslant 0$ et on en déduit que $f(\beta) - f(\alpha) \geqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $(\alpha, \beta) \in [a; b]$ avec $\alpha < \beta$, on en déduit que f est croissante sur $[a; b]$.

□

Corollaire III.12

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. La fonction f est constante sur $[a; b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a; b[$.

Corollaire III.13

Soient $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si f' est positive sur $[a; b]$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur $[a; b]$.

Théorème III.14 (Théorème des accroissements finis)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si $|f'|$ est bornée sur I :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall t \in I, \qquad |f'(t)| \leqslant K,$$

alors,

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(y) - f(x)| \leqslant K|x - y|.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in I^2$. Si $x = y$, alors : pas intéressant. Si $x \neq y$. Supposons $x < y$ (on peut traiter le cas $x > y$ de la même façon). Alors, puisque I est un intervalle, $[x; y] \subseteq I$. Or f est dérivable sur I donc f est continue sur $]x; y[$ et dérivable sur $[x; y]$. Donc par l'identité des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in]x; y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x).$$

Donc

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c_{x,y})| |y - x|.$$

Or $c_{x,y} \in]x; y[\subseteq I$. Donc par hypothèse, $|f'(c_{x,y})| \leqslant K$. Conclusion,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c_{x,y})| |y - x|.$$

□

Remarque 27 :

- **Graphiquement,** en notant $m = \inf_{c \in]a;b[} f'(c)$ et $M = \sup_{c \in]a;b[} f'(c)$ par l'identité des accroissements finis, il découle que pour tout $x \in [a; b]$,

  $$f(a) + m(x - a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + M(x - a).$$

  Par conséquent, la fonction f a un graphe qui se situe entre les droites d'équation $f(a) + M(x - a)$ et $f(a) + m(x - a)$.

- **En cinématique,** cela correspond au fait par exemple qu'une voiture dont la vitesse instantanée ne dépasse jamais 100 km/h ne pourra pas parcourir plus de 100 km en une heure.

Corollaire III.15

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ alors $K = \sup_{c\in]a;b[} |f'(c)| < +\infty$ et

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, \qquad |f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y - x|\,.$$

Démonstration. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, la fonction f' est continue sur $[a;b]$ donc la fonction f' est bornée (et atteint ses bornes) sur $[a;b]$. Donc $K = \sup_{c\in]a;b[} |f'(c)|$ existe dans $\mathbb{R}$ et on applique le théorème des accroissements finis. $\square$

Définition III.16

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k**-lipschitzienne** sur I si
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|\,.$$
2. On dit que f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $k \in \mathbb{R}$ pour lequel f est k-lipschitzienne sur I.

Proposition III.17

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est lipschitzienne sur I.
2. La fonction f' est bornée sur I.

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1). Il s'agit du théorème des accroissements finis.
(1) $\Rightarrow$ (2). Si f est k-lipschitzienne, $k \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in I$ et tout $y \in I \setminus \{x\}$, le taux d'accroissement de f en x est inférieur à k :

$$-k \leqslant \tau_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant k$$

Par passage à la limite quand $y \to x$, on obtient que $-k \leqslant f'(x) \leqslant k$ et ce pour tout $x \in I$ ce qui démontre bien le point (2). $\square$

Exemple 28 :

1. La fonction cosinus a pour dérivée $-\sin$ qui est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction cosinus est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $a < b$ deux réels. La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ par conséquent d'après le théorème des accroissements finis,
$$\forall (x,y) \in [a;b], \quad |\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x| \leqslant \sup_{z\in[a;b]} |e^z|\,|y - x| = \mathrm{e}^b\,|y - x|\,,$$
par positivité et croissance de l'exponentielle. Donc la fonction exponentielle est e^b-lipschitzienne sur $[a;b]$. Notez cependant que la fonction exponentielle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

III.3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème III.18 (de la limite de la dérivée)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

1. f est continue sur I,
2. dérivable sur $I \setminus \{a\}$
3. et on suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = l$.

Alors le taux d'accroissement de f en a admet l pour limite en a :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \tau_a(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

- Si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = l$ et f' est continue en a :
$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x).$$
- Si $l = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais admet une tangente verticale.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Par l'identité des accroissements finis, il existe $c_x \in]a; x[$ (ou $]x; a[$) telle que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Or quand $x \to a$, on a $c_x \to a$. Donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(c_x) = \lim_{\substack{u \to a \\ x \neq a}} f'(u) = l.$$

□

Corollaire III.19 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur I et $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite finie l en a, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = l$ alors f est $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = l$.

Exemple 29 : La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie sur $I = \mathbb{R}_+$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{0\}$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Or, puisque $\sqrt{x} \to 0$ quand $x \to 0$, on a aussi que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} -\frac{1}{2}\frac{\sin(u)}{u} = -\frac{1}{2}.$$

Donc par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Or f est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$. Conclusion, f est $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}_+$.

IV Extension aux fonctions complexes

Attention, on parle ici de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à **valeurs complexes**. La variable de départ, elle, reste et demeure **réelle** !

Définition IV.1

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, $f : I \to \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers l lorsque x tend a, noté $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si la fonction réelle $x \mapsto |f(x) - l|$ tend vers 0 lorsque x tend vers a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) = l \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x) - l| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \qquad (|x-a| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Remarque 30 : Il est toujours possible de considérer la limite quand x tend vers $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, cependant on ne définit pas $\overline{\mathbb{C}}$, il y a dans $\mathbb{C}$ une infinité de façon de tendre vers l'infini. En conséquence, on ne parle pas de limite vers $+\infty$ ou $-\infty$ dans $\mathbb{C}$. La limite l est toujours une limite finie $l \in \mathbb{C}$.

Exemple 31 : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ix}}{1+x^2} = 0$. En effet $\left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition IV.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. La fonction f est dite bornée sur I si et seulement si $|f|$ est bornée sur I ou de façon équivalente si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont bornées sur I.

Une fois la limite dans $\mathbb{C}$, on a les mêmes définitions de la continuité et de la dérivabilité dans $\mathbb{C}$.

Définition IV.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

- On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{C}$.
- On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{C}$.

Proposition IV.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $l \in \mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f admet une limite l en a, respectivement est continue en a, respectivement est dérivable en a.
2. La fonction $\overline{f}$ admet une limite l en a, respectivement est continue en a, respectivement est dérivable en a.
3. Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admet pour limite $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$ en a, respectivement sont continues en a, respectivement sont dérivables en a.

Proposition IV.5

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$,

- les opérations algébriques (somme, produit, inverse) sur les limites, les fonctions continues et les fonctions dérivables restent vraies,
- les fonctions ayant une limite (finie) sont bornées,
- la caractérisation séquentielle reste vraie.

Anti-Proposition IV.6

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$,

- il n'existe pas de théorème d'encadrement,
- il n'existe pas de théorème de limite monotone,
- le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection, le théorème de Rolle et l'identité des accroissements finis sont FAUX !

Exemple 32 : La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; 2\pi]$ et on a $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant pour tout $x \in [0; 2\pi]$, on a $f'(x) = i\,\mathrm{e}^{ix} \neq 0$. L'identité des accroissements finis est donc mise en défaut dans cet exemple.

Théorème IV.7 (Théorème des accroissements finis)

Soient $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{x \in]a;b[} |f'(x)| \, (b-a) \, .$$

Karl WEIERSTRASS *(Osterfelde (Allemagne) 1815 - Berlin 1897) fut un mathématicien allemand né dans une famille catholique avec un père à la personnalité écrasante. Très bon élève dans le secondaire, il dut commencer par étudier le droit et les finances. Indifférent à ces disciplines, il découvrit par la suite les mathématiques pour lesquelles il se passionna. Il enseigna d'abord en lycée avant d'obtenir un poste de professeur à l'Université de Berlin. Il fut réputé pour ses talents de pédagogue. Weierstrass publia très peu, ses résultats nous sont connus le plus souvent grâce aux notes de cours prises par ses élèves. Ses apports sont variés, citons par exemple sa construction de $\mathbb{R}$, sa construction de nouvelles fonctions comme les séries entières (voir le programme de deuxième année). Il est l'un des premiers à construire une fonction continue partout mais dérivable nulle part ! ! Il démontre également un théorème d'approximation des fonctions continues par des polynômes. Il a également travaillé sur l'algèbre linéaire et donna une définition du déterminant (cf fin d'année).*

Weierstrass est surnommé le père de l'analyse moderne. Il est à l'origine d'une très grande rigueur dans les mathématiques et fut le premier à définir la continuité « à l'aide de epsilons »

C'est l'histoire d'un ingénieur, un physicien, un mathématicien, d'un philosophe et d'un étudiant en médecine. On leur demande combien fait $5 - 3 + 2$. L'ingénieur sort sa machine et répond fièrement « $3,98$! » Le physicien sort également sa machine mais plus prudent répond « $4,01$ à 10^{-2} près ». Le mathématicien plus long à la réflexion répond enthousiaste : « Aucune idée cependant j'ai deux démonstrations élégantes de l'existence et de l'unicité de la solution ! ». Le philosophe rétorque avec un sourire en coin « Qu'entendez-vous par $5 - 3 + 2$? ». L'étudiant en médecine répond alors « Mais voyons, cela fait 4 ! ». Impressionnés les autres lui demandent :
« -Mais comment as-tu fait pour le calculer ?
-Oh, je l'avais appris par coeur. »