Chapitre XVII : Espaces Vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I Espaces, sous-espaces

I.1 Définition

Définition I.1

Soit E un ensemble muni

- d'une loi de composition interne $+$: pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y \in E$,
- d'une loi de composition externe $\cdot$: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-**un espace vectoriel** s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. La loi $+$ admet un élément neutre : il existe $0_E \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $0_E + x = x + 0_E = x$.
2. Tout élément de E admet un inverse pour $+$: pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ (noté $-x$) tel que $x + x' = x' + x = 0_E$.
3. La loi $+$ est associative : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. La loi $+$ est commutative : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$.
5. Le scalaire $1 \in \mathbb{K}$ est neutre pour la loi $\cdot$: pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$.
6. La loi $\cdot$ est doublement distributive :
   — pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
   — pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
7. La loi $\cdot$ vérifie une associativité mixte : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\,\mu) \cdot x$.

Remarque 1 :

- Les éléments de $\mathbb{K}$ (des réels ou des complexes) sont appelés des **scalaires**.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** même si ce ne sont pas des vecteurs au sens géométrique que vous avez appris au lycée, si E est un ensemble de fonctions, les vecteurs sont donc des fonctions. Ils peuvent être aussi des polynômes, des complexes, des matrices etc.

Exemple 2 : classique à connaître.

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des n-uplet $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais aussi en tant qu'ensemble de couples de réels comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition I.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors :

1. $\forall x \in E$, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot x = 0_E \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. On a
$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \qquad \text{par distributivité.}$$
Or tout élément $y \in E$ admet un inverse pour $+$. Donc pour $y = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, il existe $z = -y \in E$ tel que $y + z = 0_E$. Donc en ajoutant z de chaque côté, on obtient
$$0_E = 0_E + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x \qquad \text{car } 0_E \text{ est neutre pour } +.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque 0_E est neutre pour $+$, $0_E = 0_E + 0_E$. Donc
$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \qquad \text{par distributivité.}$$
A nouveau $y = \lambda \cdot 0_E$ est inversible dans E, il existe $z \in E$ tel que $z + y = 0_E$ donc en ajoutant z, on obtient
$$0_E = 0_E + \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot 0_E \qquad \text{car } 0_E \text{ est neutre pour } +.$$
3. Il nous faut vérifier que $(-1) \cdot x$ est l'inverse de x pour $+$. On calcule donc
$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x &= (1-1) \cdot x && \text{par distributivité} \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot x \\ &= 0_E && \text{d'après le point 1.} \end{aligned}$$
On montre de même que $(-1) \cdot x + x = 0_E$ ou l'on invoque la commutativité de $+$.
4. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tel que $\lambda \cdot x = 0_E$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors la proposition est vérifiée. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\frac{1}{\lambda}$ existe (on rappelle que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Donc
$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) &= \left(\frac{1}{\lambda} \lambda\right) \cdot x && \text{par associativité mixte} \\ &= 1 \cdot x = x. \end{aligned}$$
Donc $x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après le point 2.

□

I.2 Sous-espaces vectoriels

Définition I.3

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ des vecteurs de E. On dit que x est **une combinaison linéaire** de $u_1, \ldots u_n$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k.$$

Exemple 3 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. En effet :
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\,(1,0,0) + x_2\,(0,1,0) + x_3\,(0,0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$
2. Tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des complexes 1 et i :
$$z = a \cdot 1 + b \cdot i.$$
3. Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est combinaison linéaire de 1, X, X^2, $\ldots$, X^n.
4. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction sh est combinaison linéaire de $f_1 \; x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$:
$$\mathrm{sh} = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2.$$

Remarque 4 :

- Attention la décomposition d'un vecteur x comme combinaison linéaire d'autres vecteurs $u_1, \dots, u_n$ n'est pas nécessairement unique. Exemple dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = (1, 4, -1)$, $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, -2)$. Alors on a
$$x = u_1 + u_2 + u_3 = 2u_1 - u_2 + 0u_3.$$
- Il est donc interdit en général d'identifier :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \quad \not\Rightarrow \quad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

Exemple 5 :

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, $(2, 7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5, -2)$ et $(1, -3)$.
2. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, $(-1, 2, 2)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$, $(-2, 1, 3)$ et $(1, 0, -1)$.
3. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est combinaisons linéaires des polynômes $X^2 + 2X + 3$, $X + 1$.

Définition I.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est **un sous-espace vectoriel** de E si et seulement si F vérifie les deux propositions suivantes.

1. $F \subseteq E$,
2. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 6 : Du fait que l'on sache que E est un espace vectoriel, si $F \subseteq E$ la plupart des bonnes propriétés de $+$ et $\cdot$ se transmette automatiquement de E à F. Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, nous utiliserons donc toujours la caractérisation bien plus efficace suivante.

Proposition I.5 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F vérifie les trois propositions suivantes :

1. $F \subseteq E$
2. $0_E \in F$
3. F est stable par combinaison linéaire :
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2, \qquad \lambda x + \mu y \in F.$$

Remarque 7 : Le point 2, peut être remplacé par $F \neq \emptyset$. Si F est non vide et stable par combinaison linéaire alors il existe $x \in F$ et par stabilité, $x - x = 0_E$ est aussi dans F. Réciproquement si 0_E alors F est non vide.

Remarque 8 : Pour tout espace vectoriel E, l'espace E est un sous-espace vectoriel de lui-même et le singleton $\{0_E\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel nul.

Exemple 9 :

1. Montrer que $D = \left\{ (x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Plus généralement, toute droite du plan respectivement de l'espace **passant par l'origine** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ respectivement $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Plus généralement, tout plan de l'espace **passant par l'origine** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Justifier que $\mathscr{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - z + 1 = 0 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $H = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$ et $H' = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 1 \}$. Dire si H et H' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 10 : A connaitre.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

4. L'ensemble des solutions d'un système **homogène** de p équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
5. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire **homogène** d'ordre 1 (respectivement 2) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables (respectivement deux fois dérivables) lui-même étant un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Remarque 11 : La liste est non exhaustive. On a également,

- L'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients fixés, l'ensemble de toutes les suites arithmétiques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ...

I.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition I.6

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ des vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $u_1, \dots, u_n$, noté $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, l'ensemble défini par

$$\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \in E \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Remarque 12 : L'ensemble $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ correspond à l'ensemble des vecteurs de E que l'on peut obtenir en faisant des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$. Notamment pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$u_k = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + 1 \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n$$

et donc $u_k \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Remarque 13 : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$ de référence de E (pour lequel E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), on ne le précise pas. Cependant dans certaines situations, on indice $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_n)$ par la donnée du corps de référence pour préciser l'ensemble dans lequel l'on prend les scalaires pour effectuer les combinaisons linéaires. Par exemple $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(1, X) = \mathbb{C}_1[X]$ mais $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X) = \mathbb{R}_1[X] \neq \mathbb{C}_1[X]$.

La définition précédente sous-entend que $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Par bonheur, c'est ce que précise la proposition suivante.

Proposition I.7

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ des vecteurs de E. Alors,

1. $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Mieux : $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Démonstration.

1. On pose $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
   - Par définition, si $x \in F$, alors il est combinaison linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$:

     $$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

     Or E est un espace vectoriel contenant les vecteurs u_k et est donc stable par combinaison linéaire : $x \in E$. Donc on a bien par définition de F :

     $$F \subseteq E.$$

   - Pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$. En d'autres termes 0_E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ donc

     $$0_E \in F \qquad \text{i.e.} \qquad F \neq \emptyset.$$

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in F^2$. Par définition de F, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k.$$
Par conséquent,
$$\lambda\, x + \mu y = \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda\, \lambda_k + \mu \mu_k)}_{\in \mathbb{K}} u_k.$$
On a donc montré que $\lambda\, x + \mu y$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ et par conséquent $\lambda\, x + \mu y \in F$.

Conclusion : $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On veut montrer $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$. On pose G un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$ et on veut montrer que nécessairement G contient F tout entier (et sera donc « plus gros »). Montrons que $F \subseteq G$.
Soit $x \in F$, par définition, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k.$$
Par hypothèse tous les u_k appartiennent à G et G est un sous-espace vectoriel de E donc G est stable par combinaison linéaire (par récurrence si la combinaison linéaire de deux vecteurs de G appartient à G alors toute combinaison linéaire de n vecteurs de G appartient encore à G) :
$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k \underbrace{u_k}_{\in G}}_{\in G}}_{\in G}.$$
Donc tout élément de F appartient à G et donc $F \subseteq G$.

□

Exemple 14 :

1. Si $u \in E$, $\mathrm{Vect}(u) = \{\, \lambda\, u \in E \mid \lambda \in \mathbb{K} \,\}$ est appelé une **droite vectorielle** de E.
2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I et si A est une primitive de a sur I alors $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I est
$$\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{array}{ll} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \right).$$
3. L'ensemble $\mathscr{S}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Delta = a^2 + 4b > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de $r^2 - ar - b = 0$, on a
$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \right).$$
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$.

Proposition I.8

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ reste identique si

1. on permute deux vecteurs : $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$,
2. on multiplie un vecteur par un scalaire non nul : $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, \lambda\, u_i, \ldots, u_n)$,
3. on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs :
$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect} \left(u_1, \ldots, u_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, u_k, \ldots, u_n \right).$$

Remarque 15 :

1. On reconnait les opérations élémentaires !
2. Si un des vecteurs est nul, on peut l'ôter : $\mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_n,0_E) = \mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_n)$.
3. Si l'un des vecteurs est combinaison linéaires des autres vecteurs, on peut l'ôter :

$$\mathrm{Vect}\left(u_1,\dots,u_n,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k\right) = \mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_n)\,.$$

Remarque 16 : On peut étendre la définition d'espace vectoriel engendré : soit A une partie (quelconque) de E un espace vectoriel. On pose

$$\mathrm{Vect}\,(A) = \left\{ x\in E \;\middle|\; \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \exists\,(x_1,\dots,x_n)\in A^n,\ x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,x_k. \right\}.$$

On a alors toujours le résultat suivant : $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

II Intersection, somme, supplémentaire

II.1 Intersection

Proposition II.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si I est un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $H = F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- L'ensemble H est inclus dans E : soit $x\in H$ alors par exemple $x\in F$. Or F est un sous-espace vectoriel de E. Donc $F\subseteq E$ et donc $x\in E$. Ainsi, $H\subseteq E$.
- Puisque F est un sous-espace vectoriel, $0_E\in F$ et de même G est un sous-espace vectoriel, donc $0_E\in G$. Par suite, $0_E\in H$ (et donc $H\neq\emptyset$).
- Soient $(x,y)\in H^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Puisque $x\in H=F\cap G$, $x\in F$ et de même $y\in H$ implique que $y\in F$. Or F est un sous-espace vectoriel donc $\lambda\,x+\mu y\in F$. De même $x\in H$ et $y\in H$ implique que $x\in G$ et $y\in G$. Or G est aussi un sous-espace vectoriel donc $\lambda\,x+\mu y\in G$. Ainsi on en déduit que $\lambda\,x+\mu y\in F\cap G = H$. L'ensemble H est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion, $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Le second point présente les mêmes idées et est laissé en exercice.

□

Exemple 17 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit
$$P = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,1),(1,2,3)) \qquad \text{et} \qquad P' = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((-1,0,1),(0,2,1)).$$
Justifier que P et P' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $P\cap P'$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, soit
$$E = \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t=0 \right\}$$
$$F = \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-y+z-t=0 \right\}.$$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et déterminer $E\cap F$.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, soit $F=\mathbb{K}_3[X]$ et $G=\{\,P\in\mathbb{K}[X] \mid P(1)=0\,\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et déterminer $F\cap G$.

II.2 Somme d'espaces

Définition II.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de F et G**, noté $F+G$ l'ensemble défini par
$$F+G=\{z\in E \mid \exists x\in F,\ \exists y\in G,\ z=x+y\}.$$

Proposition II.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- Pour tout $z\in F+G$, il existe $(x,y)\in F\times G$ tel que $z=x+y$. Or par inclusion de F et G dans E, $x\in E$ et $y\in E$ donc $z=x+y\in E$. On a donc bien vérifié que $F+G\subseteq E$.
- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $0_E\in F$ et $0_E\in G$ donc $0_E=\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}\in F+G$.
  Notamment $F+G\neq\emptyset$.
- Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(z,z')\in(F+G)^2$. Par définition, il existe $(x,y)\in F\times G$ tel que $z=x+y$ et de même il existe $(x',y')\in F\times G$ tel que $z'=x'+y'$. Donc
  $$\lambda z+\mu z'=\lambda(x+y)+\mu(x'+y')=\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'.$$
  Puisque F est sous-espace vectoriel de E, $\lambda x+\mu x'\in F$. De même puisque G est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda y+\mu y'\in G$. Donc a bien écrit $z''=\lambda z+\mu z'$ comme la somme d'un élément $x''=\lambda x+\mu x'$ de F et d'un élément $y''=\lambda y+\mu y'$ de G. Conclusion : $\lambda z+\mu z'\in F+G$.

Par conséquent, l'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Exemple 18 :

1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Déterminer $F+\{0_E\}$, $F+E$ et $F+F$.
2. On pose $F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$. Montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$.

Anti-Proposition II.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a
$$F+G=F\cup G \quad\Leftrightarrow\quad (F\subseteq G \quad \text{ou} \quad G\subseteq F).$$
En particulier, il faut surtout retenir que $F+G\neq F\cup G$. L'ensemble $F\cup G$ **n'est pas** en général un sous-espace vectoriel de E !

Exemple 19 : Dans $\mathbb{R}^2$, si $F=\mathrm{Vect}((1,0))$ et si $G=\mathrm{Vect}((0,1))$ alors $F\cup G$ correspond à l'ensemble des points (x,y) qui sont ou sur l'axe des abscisses ou sur l'axe des ordonnées (ensemble non stable par combinaison linéaire) tandis que $F+G=\mathbb{R}^2$.

Remarque 20 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors
$$F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G).$$

Démonstration.

- Montrons que $F+G\subseteq\mathrm{Vect}(F\cup G)$. Soit $z\in F+G$, alors il existe $(x,y)\in F\times G$ tel que $z=x+y$. Puisque $x\in F$, alors $x\in F\cup G$ et donc $x\in\mathrm{Vect}(F\cup G)$. De même $y\in G\subseteq F\cup G\subseteq\mathrm{Vect}(F\cup G)$. Or $\mathrm{Vect}(F\cup G)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $z=x+y\in\mathrm{Vect}(F\cup G)$ ce qui démontre l'inclusion directe.

- Réciproquement, montrons que $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F + G$. Soit $x \in F \cup G$. Si $x \in F$. Alors

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G.$$

De même, si $x \in G$, alors $x = 0_E + x \in F + G$. Dans tous les cas, $x \in F + G$. Donc $F \cup G \subsetneq F + G$. Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$. Or $\text{Vect}\,(F \cup G)$ est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. En conséquence, $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F + G$.

$\square$

Proposition II.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ sont des vecteurs de E, alors

$$\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n) + \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_m) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)\,.$$

Démonstration. Démontrons le premier point.

- Montrons que $F + G \subseteq \text{Vect}\,(F \cup G)$. Soit $z \in F + G$, alors il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Puisque $x \in F$, alors $x \in F \cup G$ et donc $x \in \text{Vect}\,(F \cup G)$. De même $y \in G \subsetneq F \cup G \subsetneq \text{Vect}\,(F \cup G)$. Or $\text{Vect}\,(F \cup G)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $z = x + y \in \text{Vect}\,(F \cup G)$ ce qui démontre l'inclusion directe.
- Réciproquement, montrons que $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F + G$. Soit $x \in F \cup G$. Si $x \in F$. Alors

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G.$$

De même, si $x \in G$, alors $x = 0_E + x \in F + G$. Dans tous les cas, $x \in F + G$. Donc $F \cup G \subsetneq F + G$. Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$. Or $\text{Vect}\,(F \cup G)$ est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. En conséquence, $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F + G$.

$\square$

II.3 Espaces en somme directe

Définition II.6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **en somme directe** si et seulement si tout élément de $F + G$ se décompose de manière **unique** en un élément de F et un élément de G :

$$\forall (x, x') \in F^2,\ \forall (y, y') \in G^2, \qquad x + y = x' + y' \ \Rightarrow (x = x' \quad \text{ET} \quad y = y')\,.$$

On note alors $F \oplus G$.

Proposition II.7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

- Supposons que F et G soient en somme directe. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$ donc x admet les deux décompositions suivantes

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F \oplus G.$$

Par unicité de la décomposition, on en déduit que $x = 0_E$ et $0_E = x$ donc $x \in \{0_E\}$ et donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Bien entendu $\{0_E\} \subseteq F \cap G$ (car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel car F et G sont des sous-espaces vectoriels). Par conséquent, $F \cap G = \{0_E\}$.
- On suppose maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que F et G sont en somme directe. Soient $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$ tels que

$$x + y = x' + y'.$$

Alors le vecteur $z = x - x' = y' - y$ est à la fois un vecteur de F : $z = x - x' \in F$ car x et x' sont des éléments de F et F est un sous-espace vectoriel et à la fois un vecteur de G : $y' - y \in G$ car y' et y sont des éléments de G et G est un sous-espace vectoriel. Dès lors, $z \in F \cap G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ par hypothèse. Donc $z = 0_E$ i.e. $x = x'$ et $y = y'$ ce qui achève la démonstration.

□

Exemple 21 :

1. Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,1))$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,3))$ sont en somme directe.
2. Dans $\mathbb{K}_2[X]$, montrer que $F = \{\, P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(-1) = 0 \,\}$ sont en somme directe.
3. Dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables, montrer que $F = \{\, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \,\}$ et $G = \{\, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' = 0 \,\}$ sont en somme directe.

II.4 Espaces supplémentaires

Définition II.8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si et seulement si tout élément de E (et non plus de $F + G$) se décompose de manière **unique** en un élément de F et un élément de G :

$$\forall z \in E,\ \exists!(x,y) \in F \times G, \qquad z = x + y.$$

On note alors $E = F \oplus G$.

Proposition II.9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

1. $F + G = E$.
2. $F \cap G = \{0_E\}$

Démonstration.

- Si $F \oplus G = E$, alors tout élément se décompose (de manière unique) comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G donc $E \subseteq F + G$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on en déduit que $E = F + G$. D'autre part, par définition si F et G sont supplémentaires, ils sont notamment en somme directe et par la proposition II.7, on en déduit que $F \cap G = \{0_E\}$.
- Réciproquement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$ alors par la proposition II.7, on en déduit que F et G sont en somme directe ce qui garantit l'unicité de l'écriture (si elle existe). L'égalité $E = F + G$ assurant l'existence d'une décomposition, on en déduit que tout élément de E se décompose de manière unique et que donc $E = F \oplus G$.

□

Exemple 22 :

1. Soient $F = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 0 \,\right\}$ et $G = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = z \,\right\}$. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ mais que F et G ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que $F = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 0 \,\right\}$ et $G = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = z \text{ et } y = z \,\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{I}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications impaires et $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications paires. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe.
4. Dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont supplémentaires. Par contre, dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

III Famille de vecteurs, bases

III.1 Famille génératrice

Définition III.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est **une famille génératrice** de E si et seulement si

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = E.$$

Autrement dit, tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Exemple 23 :

1. La famille $\left(1, X, X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ car tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit
$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1\,(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2\,(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n\,(0, 0, 0, \ldots, 1)\,.$$
3. Montrer que la famille $((1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (1, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. La famille $((1, 2, 0, 1), (0, -1, 1, 1), (1, 1, 1, 1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. Soit $G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z - t = 0 \right\}$. Déterminer une famille génératrice de G.
6. La famille de polynômes $(P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2, P_3 = 1 + 3X + 5X^2)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Proposition III.2

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice de E si et seulement si les vecteurs u_i peuvent s'obtenir comme combinaison linéaire des vecteurs v_i.

Proposition III.3

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. La famille $\mathscr{F}$ reste génératrice si

1. On change l'ordre des vecteurs de la famille : $u_i \leftrightarrow u_j$.
2. On multiplie un vecteur par un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $u_i \leftarrow \lambda\, u_i$.
3. On ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs : $u_i \leftarrow u_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k\, u_k$.
4. On ajoute un vecteur u_{n+1} à la famille : $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$.
5. Plus généralement toute sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice.
6. On enlève un vecteur u_i mais **uniquement** si celui-ci est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

III.2 Famille libre

Définition III.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **libre** ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemple 24 :

1. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
2. La famille $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

3. La famille cos et sin est libre dans $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition III.5

Si $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$ est une famille libre de E, alors pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k=\sum_{k=1}^{n}\mu_k u_k\quad\Rightarrow\quad\forall k\in[\![1;n]\!],\quad\lambda_k=\mu_k.$$

Autrement dit tout vecteur de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ admet l'unicité de sa décomposition en les vecteurs $u_1,\dots,u_n$.

Proposition III.6

1. On peut effectuer des opérations élémentaires (permutation, dilatation, transvection) à une famille libre, elle restera libre.
2. On peut enlever un vecteur d'une famille libre, elle restera libre.
3. Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre est libre.
4. La famille (u_1) est libre si et seulement si $u_1\neq 0_E$.
5. Une famille est libre si et seulement si aucun des vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition III.7

Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés distincts est libre.

Exemple 25 : La famille $\left(5X^4+3X^2+8,16-X,1+7X-2X^3,4X^2+4\right)$ est libre.

III.3 Famille liée

Voici la négation d'une famille libre, une famille n'est pas libre si et seulement si elle est dite liée :

Définition III.8

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **liée** ou les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si $\mathscr{F}$ n'est pas libre i.e. s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ non tous nuls (il existe $i\in[\![1;n]\!]$ tel que $\lambda_i\neq 0$) tels que

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k=0.$$

Exemple 26 :

1. Toute famille contenant 0_E est liée.
2. Montrer que la famille $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\sin(x)$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{ix}$ est liée dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Remarque 27 : Deux vecteurs linéairement dépendants sont dits colinéaires.

Proposition III.9

1. On peut effectuer des opérations élémentaires (permutation, dilatation, transvection) à une famille liée, elle restera liée.
2. On peut ajouter un vecteur à famille liée, elle restera liée.
3. Plus généralement, toute sur-famille d'une famille liée est liée.
4. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres.

Exemple 28 :

1. Soient $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(-1,1,-1,1)$ et $e_3=(1,2,1,2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer si (e_1,e_2,e_3) est libre ou liée.
2. Soient $P_1=1+X+X^2$, $P_2=3+X+5X^2$ et $P_3=2+X+3X^2$ et $P_4=1+X^2$ quatre éléments de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer si (P_1,P_2,P_3,P_4) est libre ou liée.

IV Bases

Définition IV.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est **une base** de E si et seulement si $\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de E.

Proposition IV.2

Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$. La famille $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ i.e. :

$$\forall x \in E,\ \exists! \,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e_k.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont alors appelés les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple 29 : BASES CANONIQUES

Dans certains espaces vectoriels, il existe des bases usuelles que l'on appelle bases canoniques.

- $(1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- On pose pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } i}}{1}, 0, \dots, 0)$. La famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Les matrices $E_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ forme la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. L'exemple est généralisable à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition IV.3 (base adaptée à la somme)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace E, $(f_1, \dots, f_p) \in F^p$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q) \in G^q$ une base de G. On pose $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.

1. $F \cap G = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est famille libre de E.
2. $F + G = E$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
3. $F \oplus G = E$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration. On pose $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathscr{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G.

1. Si $F \cap G = \{0_E\}$. Alors on sait que F et G sont en somme directe : $F \oplus G$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f_k}_{=x} + \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k}_{y} = 0.$$

Puisque $x \in F$ et $y \in G$ et que $F \oplus G$, on sait que l'écriture est unique donc $x + y = 0_E + 0_E$ implique que $x = 0_E$ et $y = 0_E$ donc

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f_k = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 & \text{car } \mathscr{B}_F \text{ est libre (car c'est une base)} \\ \mu_1 = \dots = \mu_q = 0 & \text{car } \mathscr{B}_G \text{ est libre (car c'est une base)} \end{cases}$$

Donc $\mathscr{F}$ est libre.

Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est libre, alors pour $x \in F \cap G$, on a $\begin{cases} x \in F \\ x \in G \end{cases}$ et donc

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, & x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f_k \quad \text{car } \mathscr{B}_F \text{ est génératrice dans } F \text{ (car c'est une base de } F) \\ \exists\,(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q, & x = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k \quad \text{car } \mathscr{B}_2 \text{ est génératrice dans } G \text{ (car c'est une base de } G) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f_k = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, f_k - \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0 \qquad \text{car } \mathscr{F} \text{ est libre} \\
&\Rightarrow \quad x = 0_E.
\end{aligned}$$

Donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq F \cap G$ donc $F \cap G = \{0_E\}$.

2. Puisque $\mathscr{B}_F$ est une base de F, elle est génératrice de F : $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_F)$. De même $\mathscr{B}_G$ est génératrice dans G donc $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G)$. Par une propriété précédente, on sait alors que

$$F + G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_F) + \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G) = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G) = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}).$$

Alors, on a directement,

$$F + G = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathscr{F} \text{ est génératrice dans } E.$$

3. Par les deux points précédents,

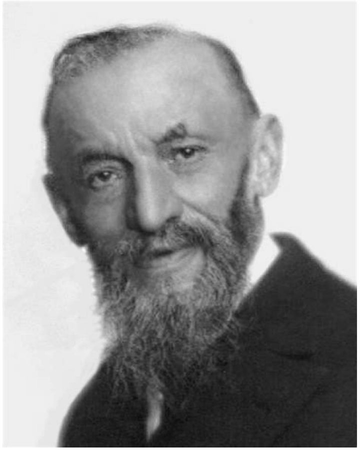
$$\begin{aligned}
\mathscr{F} \text{ est une base de } E \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathscr{F} \text{ est libre} \\ \mathscr{F} \text{ est génératrice dans } E \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad F \oplus G = E.
\end{aligned}$$

□

Remarque 30 : Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) = E$.

Exemple 31 : Soient $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + t = x - y + z - t = 0 \right\}$ et $G = \operatorname{Vect}((2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 2))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer une base de E adaptée à cette somme.



Giuseppe Peano *(Cuneo (Italie) 1858 - Turin 1932) naquit dans une famille fermière et devait parcourir 10 kilomètres chaque jour pour se rendre à l'école. Rapidement remarqué pour ses capacités intellectuelles, l'un de ses oncles prêtre et homme de loi à Turin l'accueille pour lui permettre d'effectuer ses études secondaires. Après son doctorat obtenu en 1880, il devint lecteur en calcul infinitésimal puis professeur à l'université de Turin. Il enseigna parallèlement à l'Académie militaire de Turin de 1886 à 1901. Les recherches de Peano concernaient essentiellement le calcul vectoriel et l'analyse numérique (on lui doit le théorème de Cauchy-Peano-Arzela en équation différentielle qui garantit l'existence localement d'une solution) mais son apport le plus original fut la formalisation des mathématiques et tout particulièrement l'axiomatisation des entiers naturels (appelé axiomes de Peano). On lui doit de nombreux symboles comme l'utilisation du ε pour l'appartenance transformé par la suite en $\in$, le symbole $\cup$ pour l'union, $\cap$ pour l'intersection, $\subset$ pour l'inclusion. Il nota N l'ensemble des entiers naturels. Il travailla également sur la définition de la notion d'aire et fut réputé également pour sa création d'un langage universel « Latine sine flexione » qui reprend le latin avec une grammaire très simplifiée.*
Son grand sens de la rigueur et sa volonté de donner des définitions et un formalisme sans ambiguïté le poussa à révéler de nombreuses inexactitudes de ses prédécesseurs mais aussi de ses contemporains et firent de lui un champion du contre-exemple. Le plus connu est la courbe de Peano qui remplit tout un carré du plan.
Son envie de formaliser proprement chaque concept s'étendit à ses enseignements où il introduisit également de très nombreux symboles. Ses étudiants de l'Académie de Turin perdus dans ce dédale de formules protestèrent énergiquement et devant son refus de changer le contenu de ses cours firent pression auprès de la direction qui força Peano à démissionner de son poste de l'Académie...

C'est l'histoire d'un étudiant qui discute avec l'un de ses amis et lui demande des nouvelles de sa copine, étudiante en mathématique
« C'est fini entre nous, j'ai rompu..
- Quoi ? Mais elle avait l'air tellement sympa !
-C'est vrai mais elle passait l'intégralité de ses journées à travailler ses maths, et la nuit pareil, elle passait des heures et des heures à s'acharner à résoudre des problèmes incompréhensibles en pestant tout son possible sur le caractère insoluble de l'exercice, la méchanceté de l'enseignante qui lui avait posé le problème, le ridicule des mathématiciens qui avaient développé cette théorie inextricable...
-Tu n'as jamais essayé de lui changer un peu les idées ?
-Tu parles ! Elle prenait déjà à peine le temps de manger et dormir, à la moindre interruption, elle s'écriait qu'elle ne pouvait jamais avoir la paix.
-Mais ses exercices ne devaient pas durer éternellement ?
-Non, bien sûr parfois après des jours de recherche, elle trouvait enfin la réponse...
-Et alors ?
-C'était encore pire, elle trouvait la solution tellement évidente qu'elle se dévalorisait complètement en affirmant qu'elle était vraiment trop bête de ne pas l'avoir vu plus tôt. Alors j'en ai eu marre.
-Tu as fait quoi ?
-Je lui ai dit que ce n'était plus possible, qu'il fallait qu'elle choisisse entre ses mathématiques et moi... Et tu sais ce qu'elle m'a sorti ? Qu'elle s'amusait beaucoup trop à faire des maths pour envisager ne serait-ce qu'une seconde d'arrêter !!! »