Chapitre XXIV : Représentation matricielle des applications linéaires

Dans ce chapitre nous allons établir un lien très fort entre les applications linéaires de E dans F, avec E et F des espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et les matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ce pont entre les deux chapitres donne d'une part toute leur importance aux matrices comme outil fondamental pour travailler efficacement en algèbre linéaire et d'autre part une interprétation plus concrète des applications linéaires dont l'utilité apparait avec plus de force.
Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls de dimension finie. On pose également pour tout ce chapitre

$$p = \dim(E) \qquad \text{et} \qquad n = \dim(F).$$

I Matrice d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire

Rappel (coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. Alors pour tout $u \in F$, il existe un unique n-uplet $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = u_1 e_1 + \ldots u_n e_n.$$

les scalaires $(u_1, \ldots, u_n)$ sont alors appelés les **les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**.

Notation. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, en posant pour tout $j \in [\![1; p]\!]$,

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$$

la colonne j de A, on notera alors

$$A = (C_1, \ldots, C_p).$$

Définition I.1

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et $(u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ une famille de p vecteurs de F. Pour tout $j \in [\![1; p]\!]$ on note $(u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots u_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$:

$$u_j = u_{1,j} e_1 + u_{2,j} e_2 + \cdots + u_{n,j} e_n.$$

On définit alors **la matrice des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$** par

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,j} & \ldots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,j} & \ldots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{i,1} & u_{i,2} & \ldots & u_{i,j} & \ldots & u_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,j} & \ldots & u_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 1 :

- Autrement dit $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ est la matrice dont la colonne j retourne les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$.

- Si pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note C_j le vecteur colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$, on a
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(u_1, \ldots, u_p\right) = \left(C_1, \ldots, C_p\right).$$
- En particulier, soit $x \in F$. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *coordonnées* de x dans $\mathscr{B}$ si et seulement si
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$, $u_3 = (-2,-1,0)$ et $u_4 = (1,1,1)$.

1. Déterminer la matrice de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique $\mathscr{C}$.
2. On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base $\mathscr{B}$.

Définition I.2

Soient $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}_F$. On définit alors **la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** par
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 3 :

- Avec les notations de la définition, on a
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}\left(f(\mathscr{B}_E)\right).$$
- Attention à ne pas confondre les lignes et les colonnes. Si n est la dimension de l'espace **d'arrivée** et p est la dimension de l'espace de **départ**, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation. Si $E = F$, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E alors la matrice de f dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_E$ $(= \mathscr{B}_F)$ est dite plus simplement la matrice de f dans $\mathscr{B}_E$ et est notée
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f).$$

Remarque 4 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $p = \dim(E)$, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. C'est toujours le cas, si l'on prend deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ distinctes de E (car elles ont bien entendu le même cardinal) : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}(f) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Exemple 5 : On considère l'application linéaire
$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x-y). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $\mathscr{B}_E = ((1,0),\ (1,1))$ et $\mathscr{B}_F = ((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$. Justifier que $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ respectivement $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer alors la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Exemple 6 : Pour $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto x \end{cases}$, et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right) = I_n.$$

Pour $0_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{cases} E & \to F \\ x & \mapsto 0_F \end{cases}$, $\mathscr{B}_E$ une base quelconque de E et $\mathscr{B}_F$ une base quelconque de F on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(0_{\mathscr{L}(E,F)}\right) = 0_{n,p}.$$

Remarque 7 : IMPORTANT : sauf l'exemple précédent, la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies. C'est pourquoi la notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ les spécifie. Voir l'exemple 5.

Théorème I.3

Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors l'application

$$\Phi \quad : \quad \begin{aligned} \mathscr{L}(E,F) &\to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Par conséquent $\mathscr{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathscr{L}(E,F) \cong \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On fixe toujours E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respective p et n. Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F.
Linéarité. Montrons que Φ est linéaire. Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On pose

$$\begin{aligned} A &= (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Phi(f) \\ B &= (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) = \Phi(g) \\ C &= (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \Phi(\lambda f + \mu g). \end{aligned}$$

Notez que C est bien définie car $\mathscr{L}(E,F)$ étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$. On souhaite alors montrer que $C = \lambda A + \mu B$. Fixons $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) \qquad \textit{par définition de } \lambda f + \mu g.$$

Or par définition de A, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j)) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$. Autrement dit, $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$. D'où,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

De même, par définition de B,

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(e_j) &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i && \textit{par définition de } A \textit{ et } B \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) e'_i && \textit{par linéarité de la somme et de la multiplication externe} \end{aligned}$$

Or, par définition de C on a également

$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} e'_i.$$

Donc **par unicité des coordonnées d'un vecteur** dans la base $\mathscr{B}_F$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$c_{i,j} = \lambda\, a_{i,j} + \mu b_{i,j}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on en déduit bien que

$$C = \lambda\, A + \mu B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(\lambda\, f + \mu g\right) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right) + \mu \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(g\right).$$

Injectivité. Soit $f \in \mathrm{Ker}\left(\Phi\right)$. Alors, en posant $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right)$, on a $A = 0_{n,p}$. Donc pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$f\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_j = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}} \times e'_j = 0_F.$$

Donc

$$f\left(\mathscr{B}_E\right) = \left(0_E, \ldots, 0_E\right) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\left(\mathscr{B}_E\right).$$

L'application f est donc nulle sur la base $\mathscr{B}_E$. Or une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc

$$f = 0_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}\left(\Phi\right) \subseteq \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}.$$

L'inclusion réciproque étant assurée par le fait que $\mathrm{Ker}\left(\Phi\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(E,F\right)$, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}\left(\Phi\right) = \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}$$

i.e. Φ est injective.
Surjectivité. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$. On pose pour tout $j \in [\![1;p]\!]$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

On obtient une famille $\mathscr{F} = \left(f_1, \ldots, f_p\right) \in F^p$ de p vecteurs de F. Or $p = \dim\left(E\right)$ et l'on a vu que dans ce cas il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathscr{L}\left(E,F\right)$ telle que $f\left(\mathscr{B}_E\right) = \mathscr{F}$ (proposition II.7, chapitre 19). Pour une telle application f, on a pour tout $j \in [\![1;p]\!]$,

$$f\left(e_j\right) = f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

Par conséquent,

$$\Phi\left(f\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right) = A$$

et donc A possède au moins un antécédent dans $\mathscr{L}\left(E,F\right)$ par Φ et Φ est bien surjective i.e. $\mathrm{Im}\left(\Phi\right) = \mathscr{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$.
Conclusion. Φ est une application linéaire, injective et surjective de $\mathscr{L}\left(E,F\right)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$ et définit donc un isomorphisme de $\mathscr{L}\left(E,F\right)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$.

□

Corollaire I.4

On garde les notations du théorème I.3.

1. Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}\left(E,F\right)^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(\lambda\, f + \mu g\right) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right) + \mu \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(g\right).$$

2. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}\left(E,F\right)$ telle que

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right).$$

3. Soient $(f,g)\, \mathscr{L}\left(E,F\right)^2$, on a

$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(f\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(g\right).$$

4. $\dim\left(\mathscr{L}\left(E,F\right)\right) = \dim\left(E\right) \times \dim\left(F\right)$

Définition I.5

Si E et F admettent des bases canoniques, notées $\mathscr{C}_E$ et $\mathscr{C}_F$ respectivement alors

1. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ on appelle **matrice canoniquement associée** à f la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_E,\mathscr{C}_F}(f)$.
2. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ canoniquement associée** à A dans l'unique élément f de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_E,\mathscr{C}_F}(f)$.

Remarque 8 :

- ATTENTION : à une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ correspond une unique matrice canoniquement associée mais dans le second point l'unicité n'est valide qu'à espaces E et F fixés. Par exemple I_n est la matrice canoniquement associée à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mais est aussi la matrice canoniquement associée à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ mais cette fois dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Lorsque les espaces E et F sont bien fixés alors à chaque matrice correspond canoniquement une unique application linéaire.
- Il arrive parfois que l'on parle d'application linéaire f canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sans avoir fixé E ni F. Dans ce cas, c'est que l'on sous-entend que $E=\mathbb{R}^p$ et $F=\mathbb{R}^n$.

Exemple 9 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application linéaire $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4\right)$ canoniquement associé à A puis l'application $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X],\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ canoniquement associé à A.

II Et la composition devint produit

Proposition II.1 (Vecteur image)

Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. On note

$$X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x), \qquad Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Alors

$$Y = AX \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x).$$

Démonstration. Posons $\mathscr{B}_E = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1,\dots,e'_n)$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$. Puisque

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix},$$

on a $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc par linéarité,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j).$$

Or $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ donc la colonne j de A retourne les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}_F$. Donc

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

Dès lors,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) e'_i \qquad \text{car la somme est rectangulaire.}$$

Ainsi, on reconnaît la formule du produit :

$$Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}\left(f(x)\right) = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{bmatrix} = AX.$$

$\square$

Exemple 10 : On reprend l'exemple 9. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^4$, en posant $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_{\mathbb{R}^4}}(v)$, on a bien

$$v = f(u) = (x + 2z, y - z, x + 2z, 2x - y) \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \begin{bmatrix} x + 2z \\ y - z \\ x + 2z \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Exemple 11 : On considère

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \mapsto (x - 2y, y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A canoniquement associée à f.
2. Utiliser le calcul matriciel pour déterminer $f(u)$ pour $u = (1, 2, -1)$
3. Justifier que les familles $\mathscr{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ et $\mathscr{B}_2 = ((0, 1), (1, 1))$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$, respectivement $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f)$ et $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$.
5. En déduire $Y' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(f(u))$ et vérifier la cohérence du résultat avec la question 2.

Proposition II.2 (Matrice de la composition)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. Considérons enfin $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et notons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)$ et $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f)$. Alors

$$C = BA \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f).$$

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $r = \dim(G)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e'_n)$, $\mathscr{B}_G = (e''_1, \ldots, e''_r)$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;n]\!]}$, $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;p]\!]}$ et enfin on note $C' = (c'_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;p]\!]} = BA$. Fixons $j \in [\![1;p]\!]$. Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned}
g \circ f(e_j) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\right) && \textit{par définition de } A \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, g(e'_i) && \textit{par linéarité de } g \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \sum_{k=1}^{r} b_{k,i} e''_k && \textit{par définition de } B \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,j}\right) e''_k && \textit{car la somme est rectangulaire} \\
&= \sum_{k=1}^{r} c'_{k,j} e''_k && \textit{par définition de } C' = BA.
\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de C, on a
$$g \circ f(e_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{k,j} e''_k.$$
Donc par unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}_G$, on en déduit que
$$\forall j \in [\![1;p]\!],\ \forall k \in [\![1;r]\!],\quad c'_{k,j} = c_{k,j} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = C' = BA.$$

□

Exemple 12 : On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto (P(0), P(1)) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x+y) \end{cases}$.

1. Déterminer A la matrice canoniquement associée à f, B la matrice canoniquement à g.
2. En déduire la matrice canoniquement associée à $g \circ f$ puis déterminer $g \circ f$.

Corollaire II.3

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}_E$ une base de E. Alors en notant $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}\left(f^k\right) = A^k = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)^k,$$
où on rappelle que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Proposition II.4 (Matrice de l'inverse)

On suppose dans cette proposition que $\dim(E) = \dim(F) = n$. Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$. On a alors
$$f \text{ est un isomorphisme} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ est inversible.}$$
Et dans ce cas, on a
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}\left(f^{-1}\right) = A^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)^{-1}.$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
f \text{ est un isomorphisme} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} g \circ f = \mathrm{Id}_E \\ f \circ g = \mathrm{Id}_F \end{cases} \\
&\underset{\substack{\text{point 3} \\ \text{prop I.4}}}{\Leftrightarrow} \quad \exists g \in \mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(g \circ f) = I_n \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f \circ g) = I_n \end{cases} \\
&\underset{\text{prop II.2}}{\Leftrightarrow} \quad \exists g \in \mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) & = I_n \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) & = I_n \end{cases} \\
&\underset{\substack{\text{point 2} \\ \text{prop I.4}}}{\Leftrightarrow} \quad \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad BA = I_n = AB \\
&\Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible.}
\end{aligned}$$
De plus à travers ces équivalences, on voit que dans ce cas, $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g)$ est l'inverse de A.

□

Exemple 13 : On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (y+z, x+z, x+y) \end{cases}$.

1. Déterminer A la matrice canoniquement associée à f.
2. Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. En déduire que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Proposition II.5 (Caractérisation des bases)

Soient $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E et $\mathscr{B}_E$ une base de E. On a alors l'équivalence suivante

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

Démonstration. Puisque $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs et que $p = \dim(E)$, par la proposition II.7 du chapitre 19, on en déduit qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f(\mathscr{B}_E) = \mathscr{F}$. On constate alors que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f).$$

Ainsi,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \text{ est inversible.}$$

Donc par la proposition II.4,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ est un isomorphisme.}$$

Or par le point 3 de la proposition II.6 du chapitre 20, f est un isomorphisme si et seulement l'image d'une base de E par f est une base de E. Donc dans notre cas, f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B}_E) = \mathscr{F}$ est une base de E. Conclusion,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathscr{F} \text{ est une base de } E.$$

□

Exemple 14 : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = -X^2 + X + 1$. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathscr{C}$ et en déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

III Changement de base

Définition III.1

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice définie par

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E).$$

Remarque 15 : Soit f l'unique automorphisme de E tel que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. Alors

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Remarque 16 : Faites attention à ne pas vous emmêler dans toutes ces notations. L'ordre des bases est importante. Ecrire $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E)$ est intuitif pour dire que l'on exprime $\operatorname{Id}_E(\mathscr{B}')$ dans la base $\mathscr{B}$ mais est contre-intuitif dans l'énoncé $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E)$ est la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Exemple 17 : Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Proposition III.2

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. Alors

1. *(Inverse)* La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et
$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$
2. *(Composition)* On a
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles.}$$

Démonstration.

1. C'est une conséquence de la proposition II.5. De plus par la proposition II.4,
$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E)^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\operatorname{Id}_E^{-1}) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\operatorname{Id}_E) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

2. Par la proposition II.2, on a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}\left(\mathrm{Id}_E\right) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}.$$

□

Exemple 18 : Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition III.3

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$. On note $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors on a

$$X = PX' \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles}$$

Démonstration. Par la proposition II.1, on a

$$PX' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathrm{Id}_E(x)\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = X.$$

□

Proposition III.4

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$ et $(u_1, \ldots, u_r) \in E^r$ une famille de vecteurs de E. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_r) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u_1, \ldots, u_r) \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles}$$

Exemple 19 : A l'aide de cette proposition, déterminer les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans la base $\mathscr{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Proposition III.5 (formule de changement de bases)

Soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $Q = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$ et $P = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)$. Alors

$$\begin{cases} D = P^{-1}AQ \\ A = PDQ^{-1} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\, P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)\, P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E} \end{cases}$$

Remarque 20 : Vous noterez que la relation de Chasles s'est encore fait la malle. Ces propositions sont non-intuitives et donc à bien connaître.

Démonstration. Par la définition des matrices de passage, on a

$$P^{-1}AQ = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\, P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\left(\mathrm{Id}_F\right)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}\left(\mathrm{Id}_E\right).$$

Par la formule de la composition,

$$P^{-1}AQ = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = D.$$

On peut travailler de même pour obtenir $A = PDQ^{-1}$ ou par la formule de l'inverse, puisque P et Q sont des matrices de passage, elles sont inversibles donc

$$A = P\left(P^{-1}AQ\right)Q^{-1} = PDQ^{-1}.$$

□

Corollaire III.6

Soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, en notant $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f)$, on a

$$\begin{cases} D = P^{-1}AP \\ A = PDP^{-1} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f) = P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\, P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f)\, P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E} \end{cases}$$

Exemple 21 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 22 : On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto (P(0), P(1)) \end{cases}$. On pose $\mathscr{C}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}_1 = \left(1, 1+X, 1+X+X^2\right)$ et $\mathscr{B}_2 = ((1,-1),(-1,2))$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

Définition III.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et D sont **semblables** si et seulement si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad A = PDP^{-1}.$$

Autrement dit si A et D sont deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Remarque 23 : Ne pas confondre deux matrices équivalentes $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ et deux matrices semblables.

IV Noyau, image, rang

Définition IV.1

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, l'application canoniquement associée à A.

1. On appelle **noyau de** A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de f dans $\mathbb{R}^p$.
2. On appelle **image de** A, noté $\mathrm{Im}(A)$, l'image de f dans $\mathbb{R}^n$.
3. On appelle **rang de** A, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de f.

Proposition IV.2

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, C_2, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A.

1. $\mathrm{Ker}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0_{\mathbb{R}^n} \}$.
2. $\mathrm{Im}(A) = \{ Y \in \mathbb{R}^n \mid \exists X \in \mathbb{R}^p,\ Y = AX \} = \{ AX \in \mathbb{R}^n \mid X \in \mathbb{R}^p \} = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.
3. $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

Remarque 24 : Attention !!! Si $E \neq \mathbb{R}^p$ alors $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(A)$ et de même si $F \neq \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(A)$. Par exemple si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$, alors en notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. On a $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$ tandis que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$!

Notations. Soit (S) le système $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots a_{n,p}x_p = b_p \end{cases}$. Alors, on rappelle que la résolution de (S) est équivalente à la recherche de $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$AX = B,$$

avec $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$.

Proposition IV.3

Avec les notations précédentes, on a

1. La résolution de l'équation homogène est équivalente à la recherche du noyau de A :

$$(S_0)\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad X \in \operatorname{Ker}(A).$$

2. Le système est compatible (admet au moins une solution) si et seulement si $B \in \operatorname{Im}(A)$.
3. Lorsque $n = p$, le système admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, le système est dit de Cramer et l'unique solution X_0 est donnée par

$$X_0 = A^{-1}B.$$

Exemple 25 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Théorème IV.4 (Théorème du rang version matricielle)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \dim(\operatorname{Im}(A)) + \dim(\operatorname{Ker}(A)) = p.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Par définition, on a

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$

Or $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie (égale à p) donc par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(A) + \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = p.$$

$\square$

Proposition IV.5 (admise)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}(A).$$

Exemple 26 : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{Im}(AB) = \operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(A)$.
2. Si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{Ker}(BA) = \operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg}(A)$.

Démonstration.

1. Soit $Y \in \operatorname{Im}(AB)$ alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $Y = (AB)X = A(BX)$. En posant $Z = BX \in \mathbb{R}^p$, on obtient que $Y = AZ$ et donc $Y \in \operatorname{Im}(A)$. Ainsi $\operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im}(A)$.
   Réciproquement si $Y \in \operatorname{Im}(A)$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $Y = AX$. Puisque B est inversible, B^{-1} existe dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose alors $Z = B^{-1}X \in \mathbb{R}^p$. Ainsi,
   $$Y = AX = ABB^{-1}X = ABZ.$$
   donc $Y \in \operatorname{Im}(AB)$ et l'on a $\operatorname{Im}(A) \subseteq \operatorname{Im}(AB)$.
   Conclusion $\operatorname{Im}(AB) = \operatorname{Im}(A)$. Il s'en suit immédiatement que
   $$\operatorname{rg}(AB) = \dim(\operatorname{Im}(AB)) = \dim(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{rg}(A).$$
2. Soit $X \in \operatorname{Ker}(BA)$ alors $BAX = 0_{\mathbb{R}^n}$ en multipliant à gauche par B^{-1} (existe car B inversible), on obtient que
   $$AX = B^{-1}BAX = B^{-1}0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

D'où $X \in \text{Ker}(A)$. Donc $\text{Ker}(BA) \subseteq \text{Ker}(A)$.
Réciproquement si $X \in \text{Ker}(A)$ alors $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $BAX = B0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $X \in \text{Ker}(BA)$ et donc $\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(BA)$.
Montrons maintenant que $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$. On peut passer par les applications linéaires associées et le théorème du rang. Appliquons ici plutôt la transposée. On a

$$\text{rg}(BA) = \text{rg}\left(BA^T\right) = \text{rg}\left(A^T B^T\right).$$

Or si B est inversible alors B^T est aussi inversible d'inverse $\left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$. Donc par le point précédent,

$$\text{rg}(BA) = \text{rg}\left(A^T B^T\right) = \text{rg}\left(A^T\right) = \text{rg}(A).$$

□

Proposition IV.6

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ alors $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$ et donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.
2. Si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ alors $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ et donc par le théorème du rang, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Démonstration.

1. Notons $(C_1, \ldots, C_p)$ les colonnes de A et $\left(C'_1, \ldots, C'_p\right)$ les colonnes de B. Puisque $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$, alors $(C_1, \ldots, C_p) \underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(C'_1, \ldots, C'_p\right)$. Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré donc

$$\text{Vect}(C_1, \ldots, C_p) = \text{Vect}\left(C'_1, \ldots, C'_p\right).$$

Or $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ et $\text{Im}(B) = \text{Vect}\left(C'_1, \ldots, C'_p\right)$. Donc

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(B).$$

Et donc nécessairement $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

2. Supposons que $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$. Notons $(a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}}$ les coefficient de A et $(b_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}}$ ceux de B. Alors pour $X = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on a

$$X \in \text{Ker}(A) \quad \Leftrightarrow \quad AX = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad (S)\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0. \end{cases}$$

De même

$$X \in \text{Ker}(B) \quad \Leftrightarrow \quad BX = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad (S')\ :\ \begin{cases} b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ b_{n,1}x_1 + \cdots + b_{n,p}x_p = 0. \end{cases}$$

Or si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$, alors il est possible de passer de (S) à (S') par des opérations élémentaires sur les lignes. Les opérations élémentaires ne modifiant pas l'ensemble solution, on a $(S) \Leftarrow (S')$. Ainsi,

$$X \in \text{Ker}(A) \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ solution de } (S) \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ solution de } (S') \quad \Leftrightarrow \quad X \in \text{Ker}(B).$$

Conclusion,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B).$$

Donc par le théorème du rang :

$$\text{rg}(A) = \dim(Im(A)) = \dim(K^p) - \dim(\text{Ker}(A)) = p - \dim(Ker(B)) = \dim(\text{Im}(B)) = \text{rg}(B).$$

□

Remarque 27 : Attention $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ n'implique pas que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$ et de même $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ n'implique pas $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(B)$. Exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$, pourtant

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \neq \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\,(B).$$

De la même façon, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ mais

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}\,(B).$$

Cependant dans tous les cas, on a toujours $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$.

Exemple 28 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer son image et son noyau.

Proposition IV.7

Soit $A \in \mathscr{M}_n\,(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
3. $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n$
4. $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Démonstration.

- 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons A inversible. Soit $X \in \mathbb{K}^n$. Alors, puisque A^{-1} existe,

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A) \quad \Leftrightarrow \quad AX = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad X = 0_{n,1}.$$

  Donc $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
- 2) $\Rightarrow$ 4). Supposons que $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Alors par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\,(A) = n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(A)) = n - 0 = n.$$

- 4) $\Rightarrow$ 3). Si $\mathrm{rg}\,(A) = n$. On a $\mathrm{Im}\,(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et qui vérifie $\dim\,(\mathrm{Im}\,(A)) = \mathrm{rg}\,(A) = n = \dim\,(\mathbb{K}^n)$. Donc $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n$.
- 3) $\Rightarrow$ 1). Supposons que $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n$. Notons $f : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{array}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n$. Donc f est surjective. De plus f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui est de dimension finie. Donc f est un automorphisme. Par la propriété II.4 A est inversible.

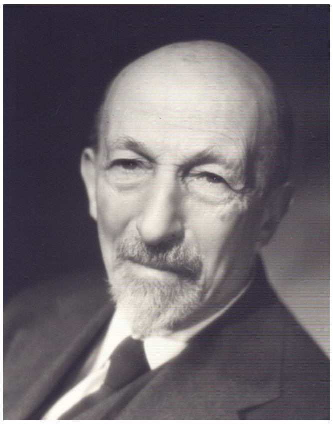
On pouvait aussi passer par f pour chaque étape de la démonstration.

□

Exemple 29 :

1. Montrer à l'aide du rang que la famille $\mathscr{F} = ((1,1,1), (2,1,0), (-1,0,1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ puis en extraire une sous-famille libre de cardinal maximal.
2. Montrer à l'aide du rang que la famille $\mathscr{F} = ((1,1), (2,1), (-1,0))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$ puis en extraire une base.
3. Par une représentation matricielle, déterminer l'image, le noyau et le rang de

$$f \;:\; \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y-z, x-y+2z, z+x). \end{array}$$



Jacques HADAMARD *(Versailles 1865 - Paris 1963) est un mathématicien français dont la vie s'étend du règne de Napoléon III à la présidence du général de Gaulle. Son enfance a été perturbée par la guerre de 1870. Son père est professeur de lettres en lycée et sa mère donne des cours de piano. Après des études brillantes à Paris au lycée Charlemagne puis Louis-le-Grand il est reçu major en 1884 à Polytechnique et à l'Ecole Normale Supérieure de Paris. Il choisit cette dernière et y bénéficie des cours de Hermite et de Darboux. Quatre ans plus tard, il enseigne de Caen puis à Paris aux lycées Saint-Louis et Buffon. Ses travaux de recherche effectués sous la direction d'Emile Picard l'amène a soutenir son doctorat en 1888 sur les fonctions définies par les séries de Taylor. Il sera alors au cours de sa vie professeur à l'Université de Bordeaux, à la Sorbonne, à l'Ecole Polytechnique, au Collège de France et à l'Ecole Centrale et sera nommé à l'Académie des Sciences. Suite à l'affaire Dreyfus (dont il est un cousin par alliance) il s'engage politiquement et prendra des positions pacifiques.*

Ses recherches ont porté sur les fonctions de la variable complexe, l'arithmétique : il démontre en parallèle De La Vallée Poussin que le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n*, noté* $\pi(n)$ *est équivalent quand* n *tend vers* $+\infty$ *à* $\frac{n}{\ln(n)}$*. Puis il s'intéresse aux équations intégrales et aux déterminants l'amenant à des résultats en algèbre linéaire. On lui doit aussi d'important résultats dans les équations aux dérivées partielles et son ouvrage « Leçon d'analyse fonctionnelle » est souvent considéré comme l'un des fondements de cette théorie.*

L'étourderie de Hadamard est légendaire. Il semblerait qu'une fois il ait oublié d'aller chercher sa soeur sur un glacier. Il parait également que lors de leur fuite aux Etats-Unis pendant la Première Guerre Mondiale, il perdit les passeports, ce qui valut à toute sa famille dix jours de prison à leur arrivée outre-atlantique, avant d'être tiré d'affaire par un universitaire influant, scandalisé qu'un savant de renommé internationale subisse une telle incarcération. Hadamard non voulant par ailleurs pas sortir avant d'avoir fini la lecture d'un ouvrage prêté par un compagnon d'infortune...

Un célèbre mathématicien invité par un laboratoire de mathématique est de passage dans une petite ville. Ayant du temps libre l'après-midi, on lui a demandé de présenter une conférence à des étudiants de licence pour leur donner une image de son domaine de recherche. Après avoir noirci plusieurs tableaux de calculs très denses, utilisant beaucoup de notions qui dépassent largement son auditoire, il se tourne vers les étudiants et pris de remords leur demande :
« Mais peut-être que certains d'entre vous n'ont jamais de fonctions de Bessel ? »
Après un assez long moment de silence, un étudiant courageux se décide à admettre son ignorance.
Le mathématicien hoche silencieusement la tête puis se tourne énergiquement vers son tableau et pointe une expression compliquée : « eh bien, une fonction de Bessel, c'est ça ! » avant de reprendre son exposé là où il s'était arrêté.