Chapitre XXVII : Géométrie de l'espace

Nous allons dans ce chapitre revoir les notions introduites dans la géométrie dans le plan et voir leurs applications dans l'espace. On note $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace, espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^3$. On note également $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace, qui est donc un espace affine de direction $\vec{E}$.

I Repères

Définition I.1

Soit $O \in \mathscr{E}$ un point de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\vec{E}$. On dit alors que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forme un **repère** de l'espace.

Proposition I.2 (Coordonnées cartésiennes)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Pour tout point $M \in \mathscr{E}$ de l'espace il existe un unique triplet de réel (x, y, z) tel que

$$M = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On appelle ce triplet les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. Comme dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{OM} \in \vec{E}$ peut se décomposer de façon unique dans la base $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. En notant (x, y, z) ses coordonnées, on obtient,

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

□

Exemple 1 : Soient $A(-2, 4, 1)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(0, 6, -3)$, $D(1, 3, 2)$ et $M\,(x, y, z)$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Proposition I.3 (Coordonnées cylindriques)

Soient $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Pour tout $M \in \mathscr{E} \backslash \{O\}$, il existe un unique triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ soient

$$\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right).$$

On appelle alors (r, θ, z) les coordonnées cylindriques de M dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. Soit (x, y, z) les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$. Posons $\zeta = x + iy \in \mathbb{C}$. D'après le chapitre sur les complexes, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $r = x^2 + y^2$ et $\theta = \arg(\zeta)$ ou encore tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

□

Remarque 2 : Naturellement θ peut être pris dans $\mathbb{R}$ tout entier l'unicité se conçoit alors modulo 2π.

Dessin :

II Opérateurs vectoriels

II.1 Le produit scalaire

Proposition II.1

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\overrightarrow{E}$. Il existe un unique produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $\overrightarrow{E}$ vérifiant

$$\langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_2}\rangle = \langle\overrightarrow{e_3}|\overrightarrow{e_3}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_2}\rangle = \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_3}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_3}\rangle = 0.$$

De plus pour tout $(\vec{u}\,(x, y, z)\,, \vec{v}\,(x', y', z')) \in \mathscr{E}^2$, on a

$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration. EXO ! Recopier la démonstration donnée dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. □

Remarque 3 : On peut alors étendre les définitions données dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ au vecteurs de l'espace :

1. Deux vecteurs $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 0$ i.e. $xx'+yy'+zz' = 0$.
2. Pour tout vecteur $\vec{u}\,(x, y, z) \in \overrightarrow{E}$, on définit **la norme euclidienne** de $\vec{u}$ par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u}|\vec{u}\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. Pour tout $A\,(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{E}$ et $B\,(x_B, y_B, z_B) \in \mathscr{E}$, on a
$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$
4. Un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ est dit **normé** si sa norme vaut 1 : $\|\vec{u}\| = 1$.

II.2 Le déterminant

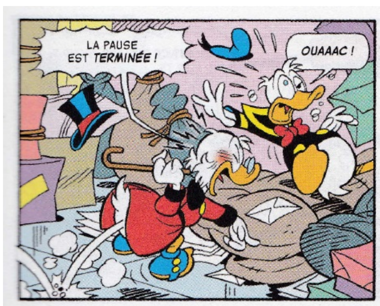
Proposition II.2

Par le théorème II.11 du chapitre précédent, on sait qu'il existe une unique forme sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, 3-linéaire, alternée vérifiant $\det(\mathscr{C}) = 1$, où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On appelle encore cette application le déterminant. Pour tout $(\vec{u}\,(x, y, z)\,, \vec{v}\,(x', y', z')\,, \vec{w}\,(x'', y'', z'')) \in \overrightarrow{E}^3$, on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - y''z'x - z''x'y$$

Exemple 4 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Par le développement d'une ligne ou d'une colonne avec la règle du signe suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$, calculer le déterminant de A.
2. Faire de même pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.



Proposition II.3

La méthode de développement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne est valable en dimension quelconque.

Exemple 5 : Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire II.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est triangulaire supérieure $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]$, $j < i$, $a_{i,j} = 0$ (respectivement inférieure), alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$$

(respectivement $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.)

Démonstration. Par récurrence en développant par rapport à la première colonne. □

Proposition II.5

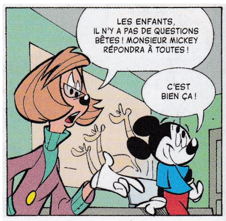
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires ont les effets suivants :

- $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant (propriété d'alternance).
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par $\frac{1}{\lambda}$ (n linéarité).
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne change pas le déterminant !

Proposition II.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$.



Corollaire II.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0.$$

Lorsque A est inversible,

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si A est inversible alors, par ce qui précède $1 = \det(I_n) = \det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A)$. Donc $\det(A) \neq 0$.
($\Leftarrow$) Si A n'est pas inversible alors $A = (C_1, \ldots, C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A forment une famille liée. Donc il existe $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$C_i = \sum_{\substack{j\in[\![1;n]\!] \\ i\neq j}} \lambda_j C_j.$$

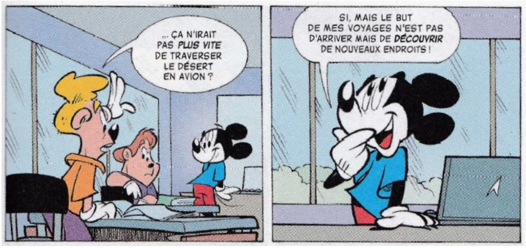
Donc par linéarité du déterminant par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ variable,

$$\begin{aligned}\det(A) = \det(C_1, \ldots, C_n) = &\sum_{j<i} \lambda_j \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) \\ &+ \sum_{j>i} \lambda_j \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned}$$

Soit $j < i$, alors en échangeant la colonne numéro i avec la colonne numéro j, on a

$$\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n).$$

Et donc, $\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) = 0$. De même si $j > i$. Conclusion,



□

Proposition II.8 (admise)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\det\left(A^T\right) = \det(A).$$

Et donc il est possible d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant (propriété d'alternance).
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie le déterminant par $1/\lambda$ (n linéarité).
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne change pas le déterminant !

Proposition II.9

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}$. Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont coplanaires si et seulement s'ils sont liés si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Démonstration. Par la négation, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont libres si et seulement s'ils forment une base de $\vec{E}$ (car la famille est de cardinal 3) si et seulement si $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est matrice de passage (avec $\mathscr{C}$ la base canonique de $\vec{E}$) si et seulement si P est inversible si et seulement si $\det(P) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$. □

Définition II.10

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3$ trois vecteurs de $\vec{E}$, on dit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **orienté dans le sens direct** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \geqslant 0.$$

II.3 Le produit vectoriel

Théorème II.11

Il existe une unique application de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$, notée $\cdot \wedge \cdot$, appelée **produit vectoriel** vérifiant les propriétés suivantes.

- *Bilinéarité.*
  1. Pour tout $\left(\vec{u}, \vec{u'}\right) \in \vec{E}^2$, $\vec{v} \in \vec{E}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u'}\right) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu \left(\vec{u'} \wedge \vec{v}\right).$$
  2. Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, $\left(\vec{v}, \vec{v'}\right) \in \vec{E}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\vec{u} \wedge \left(\lambda \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu \left(\vec{u} \wedge \vec{v'}\right).$$
- *Antisymétrique/alternée.* Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- En notant $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\vec{E}$, on a
$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}, \qquad \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}, \qquad \vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}.$$

Proposition II.12

Pour tout $\left(\vec{u}\,(x,y,z)\,,\vec{v}\,(x',y',z')\right)\in\vec{E}^2$, on a

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}z&z'\\x&x'\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}yz'-zy'\\zx'-z'x\\xy'-yx'\end{bmatrix}$$

Démonstration. Par bilinéarité,

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v}=&\quad x(\vec{e_1}\wedge\vec{v})+y\,(\vec{e_2}\wedge\vec{v})+z\,(\vec{e_3}\wedge\vec{v})\\ =&\quad xx'\vec{e_1}\wedge\vec{e_1}+xy'\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}+xz'\vec{e_1}\wedge\vec{e_3}\\ &+yx'\vec{e_2}\wedge\vec{e_1}+yy'\vec{e_2}\wedge\vec{e_2}+yz'\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}\\ &+zx'\vec{e_3}\wedge\vec{e_1}+zy'\vec{e_3}\wedge\vec{e_2}+zz'\vec{e_3}\wedge\vec{e_3}.\end{aligned}$$

Soit $i\in[\![1;3]\!]$, par antisymétrie $\vec{e_i}\wedge\vec{e_i}=-\vec{e_i}\wedge\vec{e_i}$ et donc $\vec{e_i}\wedge\vec{e_i}=0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v}&=xy'\vec{e_3}-xz'\vec{e_3}\wedge\vec{e_1}-yx'\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}+yz'\vec{e_1}+zx'\vec{e_2}-zy'\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}\\ &=xy'\vec{e_3}-xz'\vec{e_2}-yx'\vec{e_3}+yz'\vec{e_1}+zx'\vec{e_2}-zy'\vec{e_1}\\ &=(yz'-zy')\,\vec{e_1}+(zx'-xz')\,\vec{e_2}+(xy'-yx')\,\vec{e_3}.\end{aligned}$$

□

Exemple 6 : Pour $\vec{u}\,(1,2,3)$ et $\vec{v}\,(1,0,-1)$, calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Proposition II.13

Soient $(\vec{u},\vec{v})\in\vec{E}^2$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
2. Le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathrm{Vect}\,(\vec{u},\vec{v})$ (et notamment à $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Remarque 7 : Le produit vectoriel N'EST PAS associatif ! ! Exemple si $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\vec{e_1}\wedge(\vec{e_2}\wedge\vec{e_2})=\vec{0}\neq-\vec{e_1}=\vec{e_3}\wedge\vec{e_2}=(\vec{e_1}\wedge\vec{e_2})\wedge\vec{e_2}.$$

Définition II.14

Soient $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\vec{E}^3$. On appelle **produit mixte** de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\langle\vec{u}\wedge\vec{v}|\vec{w}\rangle\,.$$

Proposition II.15

Pour tout $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\vec{E}^3$, on a

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\,.$$

III Repères/bases orthonormés

Définition III.1

Soient $O \in \mathscr{P}$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{E}^3$ une base de $\vec{E}$.

- On dit que $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base orthonormée directe** si et seulement si
  1. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont normés, $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.
  2. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont tous orthogonaux deux à deux : $\left\langle \vec{i} \middle| \vec{j} \right\rangle = \left\langle \vec{i} \middle| \vec{k} \right\rangle = \left\langle \vec{j} \middle| \vec{k} \right\rangle = 0$.
  3. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orientés de sens direct, det $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \geqslant 0$.
- On dit que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un **repère orthonormé direct** si et seulement si $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe.

Proposition III.2

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{\mathscr{P}}$ une base orthonormée de $\vec{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E}$ un vecteur. Alors les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de $\vec{u}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont données par

$$x = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle, \qquad y = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle \quad \text{et} \quad z = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{k} \right\rangle.$$

Démonstration. EXO ! □

IV Expressions des opérateurs vectoriels

IV.1 En base orthonormée quelconque

Proposition IV.1

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{E}^3$ une base orthonormée de $\vec{E}$. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ trois vecteurs du plan et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^2$ et $(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement dans la base $\mathscr{B}$. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. si de plus $\mathscr{B}$ est orientée dans le sens direct alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

IV.2 Formulation géométrique

Proposition IV.2

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ deux vecteurs du plan. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$, où $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ est l'angle géométrique (non orienté) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \vec{n}$ où $\vec{n}$ est l'unique vecteur normé de $\vec{E}$, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est orienté positivement.

Proposition IV.3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{E}$. On note $\mathcal{P}$ le parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\mathscr{A}(\mathcal{P})$ son aire. Alors

$$\mathscr{A}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

Proposition IV.4

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\vec{E}$. On note $\mathcal{P}$ le parallélépipède formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\mathscr{V}(\mathcal{P})$ son volume. Alors

$$\mathscr{V}(\mathcal{P}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Dessin :

V Droites et plans de l'espace

V.1 Définition

Définition V.1

- On appelle **droite vectoriel** de l'espace tout sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\vec{E}$, i.e. engendré par un vecteur non nul,

$$\vec{\mathcal{D}} = \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \left\{ t\vec{u} \in \vec{E} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- On appelle **plan vectoriel** de l'espace tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\vec{E}$, i.e. engendré par deux vecteurs non colinéaires,

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{ \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \in \vec{E} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Définition V.2

- Soit $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{0_{\vec{E}}\}$. L'ensemble

$$\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ M \in \mathscr{E} \mid \exists t \in \mathbb{R},\ M = A + t\vec{u} \}$$

est appelé **droite affine** de l'espace $\mathscr{E}$ (de direction $\mathrm{Vect}(\vec{u})$).

- Soit $A \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble

$$\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{ A + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ M \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ M = A + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \right\}$$

est appelé **plan affine** de l'espace $\mathscr{E}$ (de direction $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$).

Remarque 8 :

- Une droite est définie par
  1. la donnée d'un point et d'un vecteur non nul dit **vecteur directeur**,
  2. ou la donnée de deux points distincts.
- Un plan est défini par

1. la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires,
2. ou la donnée de trois points non alignés.

Définition V.3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de l'espace de direction $\vec{\mathcal{P}}$. Soit $\vec{n} \in \vec{E}$. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ (ou à $\vec{\mathcal{P}}$) s'il est orthogonal à tout vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$.

Remarque 9 :

1. Un vecteur est normal à un plan affine si et seulement s'il est orthogonal à un couple de vecteurs non colinéaires du plan vectoriel associé.
2. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\,\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}$.
3. Par la proposition II.13, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 10 : Nous verrons dans la suite qu'un plan vectoriel est entièrement défini par la donnée d'un vecteur normal au plan.
ATTENTION dans l'espace, ce n'est plus le cas pour une droite. En géométrie dans le plan, la donnée d'un vecteur normal suffit à décrire une droite vectoriel. Ce résultat est faux en dimension 3. Il existe toujours une infinité de droites vectoriels orthogonales à un vecteur donné.

Dessin :

V.2 Equations de plans

Dans les propriétés qui suivent, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Proposition V.4

Soient $A\,(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma), \vec{v}\,(\alpha', \beta', \gamma')) \in \vec{E}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace passant par A et de direction $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v})$. Alors

$$\mathcal{P} = \left\{ M\,(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists\,(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{cases} \right\}.$$

Ces équations sont appelées les équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Découle directement de la définition du plan. □

Proposition V.5

Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{E}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est un plan si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{P} = \{ M\,(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \}.$$

Alors $ax + by + cz + d = 0$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$. De plus $\vec{n}\,(a,b,c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $\mathcal{P}$ est un plan affine il admet une équation cartésienne.
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathcal{P}$. On pose $\vec{n}(a,b,c) = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Alors on a vu que $\vec{n}$ est un vecteur non nul normal à $\mathcal{P}$. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM} \in \vec{\mathcal{P}}$ et donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

$$0 = \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz + d,$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Donc

$$\mathcal{P} \subseteq \{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \}.$$

Réciproquement avec cette valeur de d, $ax+by+cz+d = 0$ implique que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est libre : soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{n} = \vec{0}.$$

Donc,

$$0 = \left\langle \vec{0} \middle| \vec{n} \right\rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{n} \rangle + \mu \langle \vec{v} | \vec{n} \rangle + \nu \langle \vec{n} | \vec{n} \rangle = \nu \|\vec{n}\|^2.$$

Or $\|\vec{n}\| \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0}$ par hypothèse. Donc $\nu = 0$. Donc $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$. Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\lambda = \mu = 0$. Donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est libre et de cardinal 3 donc forme une base de $\vec{E}$. Donc il existe (α, β, γ) tel que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{n}.$$

Puisque $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$,

$$0 = \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = \alpha \langle \vec{u} | \vec{n} \rangle + \beta \langle \vec{v} | \vec{n} \rangle + \gamma \langle \vec{n} | \vec{n} \rangle = \gamma \|\vec{n}\|^2.$$

Donc $\gamma = 0$ et donc $\overrightarrow{AM} = \alpha \langle \vec{u} | \vec{n} \rangle + \beta \langle \vec{v} | \vec{n} \rangle \in \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. On a donc montré que

$$\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \} \subseteq \mathcal{P}.$$

Finalement, $\mathcal{P} = \{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \}$.
Montrons maintenant qu'une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ correspond à un plan. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ vérifiant cette équation. Supposons $a \neq 0$ (les cas $a = 0, b \neq 0$ et $a = b = 0$, $c \neq 0$ se traitent de la même façon). Alors en posant $A = \left(-\frac{b+c+d}{a}, 1, 1\right)$, on vérifie facilement que $A \in \mathcal{P}$. On note (x_A, y_A, z_A) les coordonnées de A alors, on sait que $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. Posons (x', y', z') les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0. \qquad \textit{en soustrayant par } ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad ax' + by' + cz' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}z' \qquad \textit{en supposant ici comme précédemment } a \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \quad M = A + \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Notez au passage, que cette démonstration donne une méthode pour passer du paramétrique au cartésien et réciproquement !

□

Exemple 11 : Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes des plans suivants.

1. $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$, $C(-1,2,4)$.
2. $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1,2,1)$ dont la direction contient les vecteurs $\vec{u}(4,0,3)$ et $\vec{v}(1,3,-1)$.

Proposition V.6

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de $\mathscr{E}$. Soient $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{n'}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}'$. Alors

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.
2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Proposition V.7

1. Soit $\mathcal{P} = A + \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$. On a alors la caractérisation suivante :
$$M \in \mathcal{P} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0.$$
2. Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés et soit $\mathcal{P}$ le plan affine (ABC). Alors,
$$M \in \mathcal{P} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}\right) = 0.$$

Remarque 12 : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans affines alors trois situations se présentent.

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.
2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
3. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite affine.

Exemple 13 :

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.
2. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x - 2y + 2z + 1 = 0$.
3. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : x + y - z - 1 = 0$.

V.3 Equations de droites

Proposition V.8

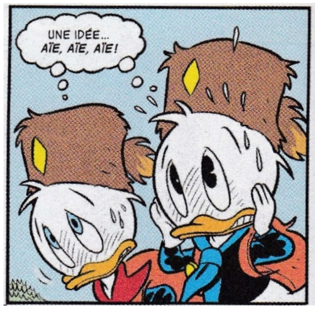
La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{E}$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \in \vec{E} \setminus \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ est donnée par ses équations paramétriques :
$$\mathcal{D} = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \right\}.$$

Proposition V.9

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de l'espace. Alors il existe $a, b, c, d, a', b', c', d'$ des réels tels que $\mathcal{D}$ est donnée par ses équations cartésiennes suivantes :
$$\mathcal{D} = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \right\}.$$
De plus les vecteurs $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n'}(a', b', c')$ sont non nuls, non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}$.

Remarque 14 : Il apparait clairement dans les équations cartésiennes qu'une droite est l'intersection de deux plans.

Exemple 15 :



1. Donner les équations paramétriques de la droite définie par

$$\begin{cases} 5x - 2y + 7z - 8 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Donner les équations cartésiennes de la droite définie par

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

V.4 Projeté sur une droite

Définition V.10

Soient $A \in \mathscr{E}$, $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$, $\mathcal{D} = A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$ une droite affine de l'espace et $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace.

- On appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$, l'unique point $H \in \mathcal{D}$ donné par

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

- On appelle distance de H à $\mathcal{D}$, noté $d(M, \mathcal{D})$, le réel défini par

$$d(M, \mathcal{D}) = HM = \left\| \overrightarrow{HM} \right\|.$$

Remarque 16 :

- En particulier, $\frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ est le projeté de $\overrightarrow{AM}$ sur la droite vectoriel $\operatorname{Vect}(\vec{u})$.
- Si, $\vec{u}$ est unitaire, le projeté est donné par $H = A + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}$.

Proposition V.11

Soient $\mathcal{D} = A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$ une droite affine, $M \in \mathscr{E}$ un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{HM}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration. On a par la relation de Chasles,

$$\left\langle \overrightarrow{HM} \middle| \vec{u} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = \left\langle -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AH} \middle| \vec{u} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle.$$

Or par définition de H, $\overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$. Donc,

$$\left\langle \overrightarrow{HM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = 0.$$

□

Proposition V.12

Soient $A \in \mathscr{E}$, $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$, $\mathcal{D} = A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$ une droite affine de l'espace et $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. La distance de M à $\mathcal{D}$ est donné par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration. Soit H le projeté de M sur $\mathcal{D}$. On a, par linéarité,

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}.$$

Or $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$. Ainsi,

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \|\vec{u}\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{HM}, \vec{u}}\right)\right|.$$

Or $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Donc $\left|\sin\left(\overrightarrow{HM}, \vec{u}\right)\right| = 1$. Finalement,

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{HM}\right\| \|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = d\left(M, \mathcal{D}\right).$$

□

Exemple 17 :

1. Déterminer la distance de $A(-1, 1, 3)$ à la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la distance de $A(1, 2, 3)$ à la droite d'équations $\begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

V.5 Projeté sur un plan

Définition V.13

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A \in \mathscr{E}$ et de vecteur normal $\vec{n} \in \vec{E} \setminus \{0_E\}$. Soit $M \in \mathscr{E}$.

- On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, le point H défini par

$$H = M - \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

- On appelle distance de M à $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, le réel

$$d(M, \mathcal{P}) = HM = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|.$$

Dessin :

Proposition V.14

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A \in \mathscr{E}$. Soient $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires. Alors pour tout $M \in \mathscr{E}$,

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Notamment si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et si M a pour coordonnées (x_M, y_M, z_M), alors

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque 18 : Pour une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace, on a toujours $d(M, \mathcal{D}) = \min_{B \in \mathcal{D}} \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$.

De même pour un plan $\mathcal{P}$, on a aussi, $d(M, \mathcal{P}) = \min_{B \in \mathcal{P}} \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$.

Exemple 19 :

1. Déterminer la distance de $M(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équations $\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 3 - t + 2s \\ z = 1 + 2t + s \end{cases}$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les plans $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x - 4y + 4z - 3 = 0$ sont parallèles et calculer la distance de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$.

VI Equations de sphères

Proposition VI.1

La sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ a pour équation cartésienne

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2.$$

Exemple 20 :

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 1y + 5 = 0$.

Intersection d'une sphère et d'une droite. Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite.

(i) si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, l'intersection est vide.

(ii) si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, l'intersection est un point, la droite est tangente à la sphère.

(iii) si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, l'intersection est un couple de points.

Exemple 21 :

1. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 11 = 0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$
2. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 3/2 = 0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
3. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 11 = 0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Intersection d'une sphère avec un plan. Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R.

(i) si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$, l'intersection est vide.

(ii) si $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$, l'intersection est un point, le plan est tangent à la sphère.

(iii) si $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$, l'intersection est un cercle.

Exemple 22 :

1. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ avec le plan $\mathcal{P} : 2x-y+3z-2=0$.
2. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+2y+z^2-2=0$ avec le plan $\mathcal{P} : x+y+z-2=0$.
3. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+5/3=0$ avec le plan $\mathcal{P} : x-y+z+1=0$.

Intersection de deux sphères. Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{S}'$ une autre sphère de centre Ω' et de rayon R'.

(i) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) > R+R'$, l'intersection est vide.

(ii) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) = R+R'$, l'intersection est un point, les sphères sont extérieurement tangentes.

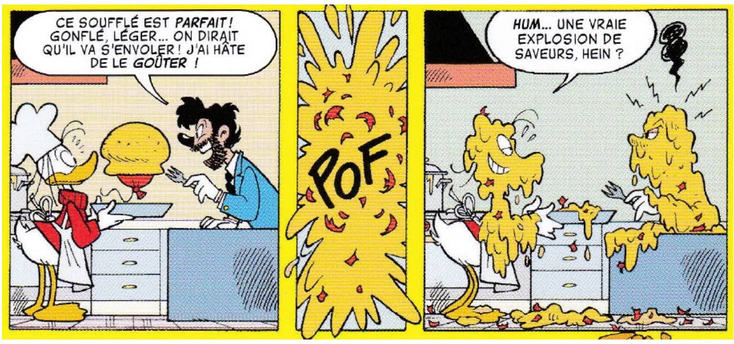
(iii) si $|R-R'| \leqslant d\left(\Omega, \Omega'\right) < R+R'$, l'intersection est un cercle.

(iv) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) = |R-R'|$, l'intersection est un point, les sphères sont intérieurement tangentes.

(v) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) < |R-R'|$, l'intersection est vide.

Exemple 23 :

1. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-5x-3y+5z+4=0$.
2. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2=0$.
3. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-13=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-1=0$.



VII Transformations de l'espace

VII.1 Projection

Définition VII.1

Soient $\vec{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\vec{E}$ et $\vec{n} \neq \vec{0}$ un vecteur normal à $\vec{\mathcal{P}}$.

1. On appelle projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(\vec{n})$ l'application

$$\begin{aligned} p_{\vec{n}} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{u} &\mapsto \frac{\langle \vec{u} | \vec{n} \rangle \, \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}. \end{aligned}$$

2. On appelle projection orthogonale sur $\vec{\mathcal{P}}$ l'application

$$\begin{aligned} p_{\vec{\mathcal{P}}} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{u} &\mapsto \vec{u} - \frac{\langle \vec{u} | \vec{n} \rangle \, \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}. \end{aligned}$$

Dessin :

Proposition VII.2

Soient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On pose $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{n}$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Alors

1. La projection $p_{\overrightarrow{n}}$ sur $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{n}\right)$ et la projection $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont des endomorphismes de $\overrightarrow{E}$.
2. Dans la base $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(p_{\overrightarrow{n}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 24 : Une projection n'est toujours pas bijective mais vous noterez que $p_{\overrightarrow{n}} + p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ qui traduit en réalité le fait que $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{n}\right) + \overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{E}$. Ces espaces sont mêmes supplémentaires et la décomposition est donnée par les projections respectives !

Proposition VII.3

Soient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On pose $p_{\overrightarrow{n}}$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{n}\right)$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors $p_{\overrightarrow{n}}$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ sont des projecteurs vectoriels :

1. $p_{\overrightarrow{n}} \circ p_{\overrightarrow{n}} = p_{\overrightarrow{n}}$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \circ p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
2. $\mathrm{Im}\left(p_{\overrightarrow{n}}\right) = \mathrm{Ker}\left(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{n}\right) = \left\{ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \,\middle|\, p_{\overrightarrow{n}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \right\}$.
3. $\mathrm{Ker}\left(p_{\overrightarrow{n}}\right) = \mathrm{Im}\left(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{P}} = \left\{ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \,\middle|\, p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \right\}$.

Remarque 25 : La matrice A d'une projection dans l'espace (sur une droite ou un plan) vérifie donc toujours $A^2 = A$.

Exemple 26 :

1. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $x - 2y + 3z = 0$ dans la base canonique et dans une base adaptée que l'on précisera.
2. Soit $p \in \mathscr{L}\left(\overrightarrow{E}\right)$ telle que sa matrice dans la base canonique soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que p est une projection et déterminer dans quel ensemble.

VII.2 Réflexion/Symétrie

Définition VII.4

Soit $p \in \mathscr{L}\left(\vec{E}\right)$ une projection vectorielle (sur un plan ou une droite). On appelle symétrie s orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}\,(p)$ l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$:

$$\begin{aligned} s : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{u} &\mapsto s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}. \end{aligned}$$

Lorsque $\mathrm{Im}\,(p)$ est un plan, la symétrie est appelé une **réflexion**.

Dessin :

Proposition VII.5

Soient $\vec{F}$ une droite ou un plan de $\vec{E}$ et $s_{\vec{F}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F}$. Alors $s_{\vec{F}}$ est un endomorphisme de $\vec{E}$. De plus,

1. Si $\dim\left(\vec{F}\right) = 1$ i.e. si $\vec{F}$ est une droite, alors, il existe $\mathscr{C}$ une base de $\vec{E}$ telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Si $\dim\left(\vec{F}\right) = 2$ i.e. si $\vec{F}$ est un plan, alors, il existe $\mathscr{C}$ une base de $\vec{E}$ telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition VII.6

Soient s une symétrie orthogonale de l'espace.

1. L'application s est un automorphisme.
2. L'application s est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $\|s(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.
3. L'application s conserve le produit scalaire : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$, $\langle s(\vec{u}) | s(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$.
4. Si A est la matrice de s dans une base orthonormée directe alors A une matrice orthogonale :
$$A^{-1} = A^T = A.$$

Proposition VII.7

Soient $\vec{F}$ une droite ou un plan de l'espace, s une symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F}$ et A la matrice de s dans une base.

1. $s \circ s = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ i.e. $A^2 = I_3$.
2. $\vec{F} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \left\{ \vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \;\middle|\; s(\vec{u}) = \vec{u} \right\}$.

Exemple 27 : Soit $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'une symétrie dont on déterminera les points fixes.

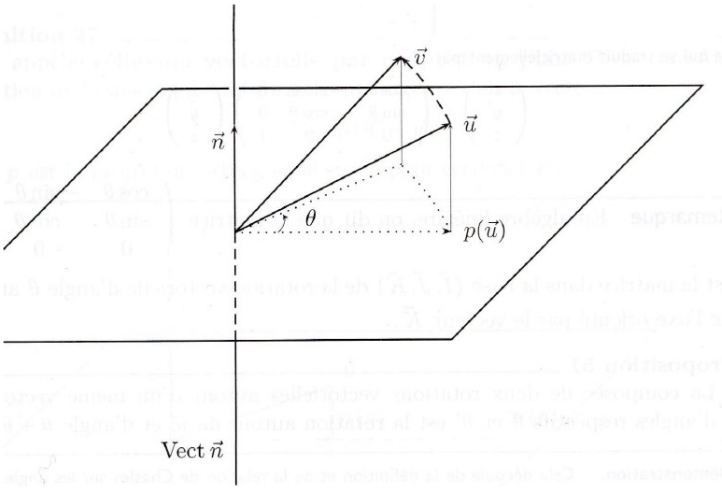
VII.3 Rotation dans l'espace

Définition VII.8

Soient $\vec{n} \in \vec{E}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{n}$, $p_{\vec{n}}$ la projection orthogonale sur $\vec{n}$ et $p_{\vec{\mathcal{P}}}$ la projection orthogonale sur $\vec{\mathcal{P}}$. On appelle alors rotation vectorielle $R_{\vec{n},\theta}$ d'axe $\operatorname{Vect}(\vec{n})$ et d'angle θ, l'application définie par

$$\begin{aligned} R_{\vec{n},\theta} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{v} &\mapsto p_{\vec{n}}(\vec{v}) + r_\theta\left(p_{\vec{\mathcal{P}}}(\vec{v})\right), \end{aligned}$$

où r_θ est la rotation plane dans $\vec{\mathcal{P}}$ d'angle θ.



Proposition VII.9

Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace et θ un réel. On pose $\vec{e_1} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, $\vec{e_2}$ un vecteur normé et orthogonal à $\vec{e_1}$ et enfin $\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$. Alors $R_{\vec{n},\theta}$ est une application linéaire et sa matrice dans la base $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est donnée par

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(R_{\vec{n},\theta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition VII.10

Soient $\vec{n} \in \vec{E}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_{\vec{n},\theta}$ la rotation d'axe $\operatorname{Vect}(\vec{n})$ et d'angle θ.

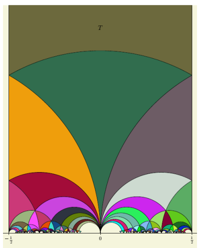
1. L'application $R_{\vec{n},\theta}$ est un automorphisme.
2. L'application $R_{\vec{n},\theta}$ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{v} \in \vec{E}$, $\|R_{\vec{n},\theta}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
3. L'application $R_{\vec{n},\theta}$ conserve le produit scalaire : $\forall \left(\vec{v}, \vec{v'}\right) \in \vec{E}^2$, $\left\langle R_{\vec{n},\theta}(\vec{v}) \middle| R_{\vec{n},\theta}\left(\vec{v'}\right)\right\rangle = \left\langle \vec{v} \middle| \vec{v'}\right\rangle$.
4. Si A est la matrice de $R_{\vec{n},\theta}$ dans une base orthonormée directe alors A une matrice orthogonale :
$$A^{-1} = A^T.$$
5. La droite $\operatorname{Vect}(\vec{n})$ est laissée fixe par la rotation : $\operatorname{Vect}(\vec{n}) = \operatorname{Ker}\left(R_{\vec{n},\theta} - \operatorname{Id}_{\vec{E}}\right) = \left\{ \vec{v} \in \vec{E} \;\middle|\; R_{\vec{n},\theta}(\vec{v}) = \vec{v} \right\}$.

Henri POINCARE *(Nancy 1854 - Paris 1912) est mathématicien, physicien, astronome et même philosophe français qui ne doit pas être confondu avec Raymond Poincaré (1860-1934) homme politique français, président de la République de 1913 à 1920 et... cousin germain de Henri Poincaré ! Fils du doyen de la faculté de médecine de Nancy, Henri Poincaré manque de mourir à l'âge de cinq ans d'une diphtérie et conservera une santé fragile. Aussi, enfant, il préfère déjà la lecture et les études aux jeux brutaux des autres enfants de son âge. Sa mère très cultivée, l'éduque et développe ses aptitudes littéraires. Pendant la guerre de 1870, il suit son père sur les routes et l'aide à soigner les soldats blessés. Il en profite pour apprendre l'allemand. Ses talents en mathématiques sont rapidement révélés et il reçu à l'Ecole Normale Supérieure et l'Ecole Polytechnique en* 1873. *Il choisit cette dernière et complète sa formation à l'Ecole des Mines tout en travaillant sa thèse. Il passe son doctorat à l'Université de Paris sous la direction de Hermite en présence de Darboux. D'abord nommé à Caen, il obtient ensuite une chaire à l'Université de Paris qu'il occupera jusqu'à sa mort à l'âge de cinquante-huit ans.*

La production de Poincaré est très abondante. Il rédige beaucoup et très rapidement, presque trop et ses articles sont parfois prolixes et confus. Mais la très grandes richesses et la nouveauté des théories qu'il introduit font de lui l'un des plus grands mathématiciens de la fin du dix-neuvième siècle et du début du vingtième. Il proposa des avancées dans l'étude des équations différentielles et dans l'analyse complexe. Il fut l'un des pionniers de la topologie. Son opposition à Cantor peut sembler paradoxale mais est corroborée par des positions plus philosophiques. On lui doit également des résultats en théorie des nombres et en théorie des probabilités. Non seulement il maitrisait l'ensemble des branches des mathématiques mais on lui doit aussi des travaux en physique : des prémices de la théorie de la relativité à la théorie quantique, il est également considéré en mécanique céleste comme le successeur de Laplace et étudia le problème à trois corps, la stabilité des anneaux de Saturne et l'origine des étoiles doubles. Il est élu en 1887 à l'Académie des Sciences dont il devient président en 1906. Fait plus rare parmi les scientifiques, il est aussi nommé en 1908 à l'Académie Française. Ses ouvrages philosophiques de vulgarisation des sciences sont aussi réputés.

Lorsque l'Académie Française doit élire en 1908 un nouveau membre, Henri et Raymond Poincaré sont tous les deux cités. Les académiciens de droite étant hostile aux opinions politiques de Raymond, font élire Henri en ayant l'idée qu'une fois l'un des deux cousins élus, il serait impensable qu'un autre membre de la même famille puisse aussi siéger à l'Académie. Ils déchantèrent rapidement, l'année suivante, Raymond fut élu...

Le demi-plan de Poincaré est un exemple d'espace en dimension 2 *de géométrie non euclidienne où les plus courts chemins, appelés géodésiques, pour aller de A à B ne sont plus toujours des droites mais aussi des arcs de cercle. Ici, la géométrie est dite hyperbolique (à courbure négative au contraire de la sphère qui est à courbure positive) et pour tout point extérieur à une géodésique il passe une infinité de géodésiques parallèles (qui n'intersectent pas) à la première. Ceci est faux dans le plan euclidien où les géodésiques sont des droites !*



Il reçut en 1889, le prix du roi Oscar de Norvège et de Suède, un passionné de mathématiques. Cependant alors qu'il préparait le manuscrit de Poincaré avant son impression, le jeune mathématicien Phrägmen repère une erreur. Poincaré dut rembourser les frais engagés qui étaient supérieurs de quelque mille couronnes à la récompense qu'il venait de recevoir... A quelque chose malheur est bon, après de profonds remaniements, en lieu et place de démontrer la stabilité mécanique du système solaire (l'objet de son mémoire initial), Poincaré jeta les bases de ce qui deviendra la théorie du chaos !

Un mathématicien a passé des années à tenter de prouver l'hypothèse de Riemann, en vain. Harassé, il passe un pacte avec le diable lui cédant son âme en échange d'une démonstration. Le regard cupide, le diable lui promet en se frottant les mains (ou les sabots allez savoir) de revenir dans quatre semaines avec une démonstration. Un mois, deux mois, six mois... s'écoulent sans que le diable ne revienne. Au septième mois, le diable refait surface d'un air très sombre et très fatigué. « Notre contrat est non avenu, gronde-t-il, je n'ai pas réussi à prouver l'hypothèse de Riemann non plus. »
« Cependant ! » Son visage s'éclaire alors, « je pense que j'ai trouvé un lemme vraiment très intéressant... »

Savez-vous ce qu'est un crétin sphérique ?

Un individu gonflé (bien sûr) fermé et borné (comme la sphère en tant que partie de $\mathbb{R}^3$) et crétin, et ce quel que soit le point de vue par lequel on l'observe !
Cette insulte est de Zwicky un astrophysicien du XXième siècle réputé pour ses idées, ses découvertes de super-novaes et... son caractère profondément irascible.