Chapitre IX : Calculs d'intégrales

I Existence d'une primitive

I.1 Définition d'une primitive

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition I.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $F : I \to \mathbb{K}$ est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Remarque 1 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une fonction F est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{Re}\,(F)$ est une primitive de $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(F)$ est une primitive de $\mathrm{Im}\,(f)$. Donc pour déterminer une primitive de f, il (faut et il) suffit de trouver une primitive de $\mathrm{Re}\,(f)$ et une primitive de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exemple 2 :

1. $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$.
2. Si $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
3. Si $I \subseteq \mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Proposition I.2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I et si $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de g sur I, alors

$$\lambda F + \mu G \text{ est une primitive de } \lambda f + \mu g \text{ sur } I.$$

Exemple 3 : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)$

Rappel-Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les primitives de la fonction nulle sur I sont les fonctions constantes sur I : soit $F : I \to \mathbb{K}$.

$$(F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I,\ F'(x) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists C \in \mathbb{K},\ \forall x \in I,\ F(x) = C).$$

Proposition I.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

1. Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, alors pour tout $c \in \mathbb{K}$, la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f.
2. Soient $F : I \to \mathbb{K}$ et $G : I \to \mathbb{K}$ deux primitives de f sur I. Alors
$$\exists c \in \mathbb{K}, \qquad F = G + c.$$
3. Soient $a \in I$ et $A \in \mathbb{K}$. Si f admet une primitive sur I, alors il existe une unique primitive $F : I \to \mathbb{K}$ telle que
$$F(a) = A.$$

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

1. Si F est un primitive de f sur I, alors $F + c$ est dérivable sur I et $(F + c)' = F' + 0 = f$ donc $F + c$ est une primitive de f sur I.
2. Soient $F : I \to \mathbb{K}$ et $G : I \to \mathbb{K}$ deux primitives de f sur I. Alors pour tout $x \in I$,
$$F'(x) = f(x) = G'(x) \quad \Leftrightarrow \quad (F - G)'(x) = 0.$$

Donc d'après le rappel précédent, il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) - G(x) = c$ et donc pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

3. Soient $a \in I$ et $A \in \mathbb{K}$. On suppose que f admet une primitive sur I. Notons-la G.
   Existence. On pose alors $c = -G(a) + A$ et $F : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto G(x) + c$. Puisque $c \in \mathbb{K}$ est une constante, d'après le premier point, la fonction F est une primitive de f. De plus $F(a) = G(a) + c = G(a) - G(a) + A = A$. Donc F est une primitive de f telle que $F(a) = A$.
   Unicité. Soient $F_1 : I \to \mathbb{K}$ et $F_2 : I \to \mathbb{K}$ deux primitives de f sur I telles que $F_1(a) = F_2(a) = A$. Puisque F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, d'après le point 2, il existe $c \in \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I$, $F_1(x) = F_2(x) + c$. Notamment, $F_1(a) = F_2(a) + c \Leftrightarrow c = F_1(a) - F_2(a)$. Or $F_1(a) = A = F_2(a)$. Donc $c = 0$ et finalement $\forall x \in I$, $F_1(x) = F_2(x)$, c'est-à-dire $F_1 = F_2$ sur I.

□

Remarque 4 : Aucun de ces résultats n'assure l'existence d'une primitive mais donne des propriétés sur les primitives de f lorsque f admet au moins une primitive. L'existence d'une primitive n'est pas assurée pour toute fonction.

Exercice 5 : Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0; 2[$.

I.2 Les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition I.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur I, noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ ou $f \in \mathscr{C}^1(I)$ si et seulement si

(i) f est une fonction dérivable sur I

(ii) sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 6 : Puisqu'une fonction dérivable est continue, on en déduit que toutes les fonctions deux fois dérivables sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 7 : La somme, le produit, la composition, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions $\mathscr{C}^1$ est encore une fonction $\mathscr{C}^1$.

I.3 Existence dans le cas continu

On commence par définir l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes (mais toujours de la variable réelle).

Définition I.5

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ une fonction **continue** sur $[a; b]$. On note $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. Puisque f est continue, les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur $[a; b]$ et donc les intégrales $\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$ existent. On définit alors l'intégrale de f sur $[a; b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le schéma logique général pour la construction théorique de primitives pour les fonctions continues est le suivant :

- On construit l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues (cf second semestre).
- On montre que l'intégrale d'une fonction continue est une primitive de cette fonction (cf second semestre).

Théorème I.6 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur I. Alors, la fonction f admet des primitives sur I. Plus précisément, pour tout $A \in \mathbb{K}$, la fonction F définie sur I par

$$F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = A$. De plus, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Le fait que F soit une primitive de f sera démontré au second semestre. Cependant par définition de l'intégrale, on a bien $F(a) = A$ ce qui d'après la proposition I.3 garantit que F est **l'unique** primitive de f telle que $F(a) = A$. Enfin puisque F est une primitive de f sur I, F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Or f est continue sur I donc F' est continue sur I, c'est-à-dire F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Remarque 8 :

- Pour $x_0 \in I$, alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est LA primitive de f s'annulant en x_0.
- Pour désigner une primitive quelconque, il est courant de la noter $F : x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire I.7

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a;b]$ et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur $[a;b]$. D'après le théorème I.6, la fonction f admet des primitives sur $I = [a;b]$. Soit F une primitive de f. On pose $A = F(a)$. Alors, toujours d'après le théorème I.6, la fonction $\tilde{F} : x \mapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f telle que $\tilde{F}(a) = A = F(a)$. Donc par unicité, $\tilde{F} = F$ et pour tout $x \in [a;b]$,

$$F(x) = A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

avec $A = F(a)$. Donc en particulier pour $x = b$,

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Corollaire I.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$. Alors,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

II Propriétés de l'intégrale

Proposition II.1

Soient f et g deux fonctions continues sur I, $(a,b,c) \in I^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. L'intégrale vérifie les propriétés suivantes.

1. **Inversion des bornes** :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. **Linéarité** :
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. **La relation de Chasles** :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$
4. **L'inégalité triangulaire** : si $a \leqslant b$,
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 9 : Pour utiliser l'inégalité triangulaire vous devez toujours vérifier et justifier que les bornes sont dans le bon sens : $a \leqslant b$.

Proposition II.2

Soient f et g deux fonctions continues sur I, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$**,** et $(a, b) \in I^2$. L'intégrale vérifie les propriétés suivantes.

1. **Positivité** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
2. **Séparation** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $a < b$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \;\Rightarrow\; \forall t \in [a; b],\; f(t) = 0.$$
3. **Croissance** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $\forall t \in [a; b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition II.3 (Intégration par parties)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors,
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction uv est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$ comme produit de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Donc, d'après le Corollaire I.8, pour tout $x \in [a; b]$,
$$u(x)v(x) = u(a)v(a) + \int_a^x (uv)'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Or $(uv)' = u'v + uv'$. Donc en prenant $x = b$,
$$u(b)v(b) = u(a)v(a) + \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
□

Remarque 10 : Lorsque vous devrez appliquer une intégration par parties, écrire au brouillon quelle valeur vous prenez pour u' et quelle valeur pour v. En déduire ensuite au brouillon u et v'. Présentez au propre vos fonctions u et v et justifiez qu'elles sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors et alors seulement, vous pouvez appliquer la formule.

Exemple 11 : Calculer l'intégrale $\int_1^e \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire II.4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors
$$\forall x \in I,\; \int_a^x u'(t)v(t) = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 12 : Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition II.5 (Changement de variables)

Soient

(i) I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$,

(ii) $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(iii) $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J.

Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur J, il existe $F : J \to \mathbb{R}$, une primitive de f sur J et la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur J. Pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in J$. Donc la fonction $F \circ \varphi$ est bien définie sur I et est $\mathscr{C}^1$ sur I comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$. De plus

$$\forall t \in I,\ (F \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) F'(\varphi(t)) = \varphi'(t) f(\varphi(t)).$$

La fonction $t \mapsto \varphi'(t) f(\varphi(t))$ est continue sur I (comme produit et composée de fonctions continues ou comme dérivée d'une fonction $\mathscr{C}^1$) et la fonction $F \circ \varphi$ est une primitive de $t \mapsto \varphi'(t) f(\varphi(t))$ sur I. Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a).$$

Or la fonction F est une primitive de la fonction f continue sur J. Donc à nouveau par le théorème fondamental de l'analyse, (avec $a' = \varphi(a)$ et $b' = \varphi(b)$),

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemple 13 : Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

Démonstration. Ici on a la formule *ancienne* $= \varphi($*nouvelle*$)$, avec $\varphi = \sin$, *ancienne* $= x$ et *nouvelle* $= t$. On part donc de $\int_{x=\varphi(a)}^{x=\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$. Posons $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{6}$, et $\varphi = \sin$ alors $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$. La fonction sin est $\mathscr{C}^1$ sur $I = \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et $\sin(I) = J = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Posons $f : \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Puisque $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $1 - x^2 \neq 0$, la fonction f est continue sur $J = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Donc

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi'(x) f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Or sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, la fonction cosinus est strictement positive. Donc

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

□

Exemple 14 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $y = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

Démonstration. Le changement de variables proposé est *nouvelle* $= \varphi($*ancienne*$)$, nous allons donc utiliser la formule de gauche à droite. Posons $I = [0; 1]$, $\forall x \in I$, $\varphi(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$ et $J =]1; +\infty[$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$e^{2x} > 0$, on a $1+e^{2x} > 1$ et donc $\varphi(I) \subseteq J$. De plus la fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur I. Pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = \frac{2\,e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int_0^1 \varphi'(x)\frac{1}{e^{2x}}\,dx.$$

Or pour tout $x \in I$, $e^{2x} = \varphi(x)^2 - 1$. En conséquence, posons $f : J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y^2-1}$. La fonction f est bien définie et continue sur J et donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int_0^1 \varphi'(x)\frac{1}{e^{2x}}\,dx = \int_0^1 \varphi'(x) f\left(\varphi(x)\right)dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(y)\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{y^2-1}\,dy$$

Or pour tout $y > 1$, $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1/2}{y-1}\,dy - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1/2}{y+1}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(y-1)\right]_{y=\sqrt{2}}^{y=\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{2}\left[\ln(y+1)\right]_{y=\sqrt{2}}^{y=\sqrt{1+e^2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+e^2}-1\right)^2}{1+e^2-1}\,\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+e^2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{e^2}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+e^2}-1\right) + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - 1.
\end{aligned}$$

□

Exemple 15 : Calculer les primitives de $g : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

Exemple 16 : Calculer les primitives de $g : x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}$.

III Primitives usuelles et techniques de calcul

III.1 Primitives usuelles

$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 1$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$		$u'u^\alpha$, $\alpha \neq 1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + C$		$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + C$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + C$		$u'\,\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$		$u'\ln(u)$	$u\ln(u) - u + C$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$		$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$		$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + C$		$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u) + C$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$		$u'\tan(u)$	$-\ln(\lvert\cos(u)\rvert) + C$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x) + C$		$u'\,\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u) + C$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x) + C$		$u'\,\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + C$		$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x) + C$		$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u) + C$

III.2 Autres techniques de calcul

L'objectif principal dans la recherche d'une primitive est transformer l'expression de la fonction pour se ramener à une fonction dont on connaît la primitive, par intégration par parties, changement de variables ou par calcul direct comme dans les exemples qui suivent.

Exemple 17 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a}$.

- Si $a = 0$, alors les primitives sont $x \mapsto -\frac{1}{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- Si $a > 0$, alors $\frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}$ donc les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, posons $\alpha = \sqrt{-a} > 0$. Alors, $\frac{1}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{(x-\alpha)(x+\alpha)} = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{x+\alpha}$, donc les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{2\alpha}\ln(\lvert x-\alpha\rvert) - \frac{1}{2\alpha}\ln(\lvert x+\alpha\rvert) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 18 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$, $\alpha > 0$. On factorise par α^2 : $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}}$. Donc les primitives sont $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 19 : Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$. On regarde Δ le discriminant de $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors il existe α et β dans $\mathbb{R}$ (les racines de P) distincts tels que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ que l'on écrit $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$, les primitives sont alors $x \mapsto A\ln(\lvert x-\alpha\rvert) + B\ln(\lvert x-\beta\rvert) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)^2}$. Donc les primitives sont $x \mapsto \frac{-1}{a}\frac{1}{x-\alpha} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ tels que $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{a\beta^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$. En conséquence les primitives sont $x \mapsto \frac{1}{a\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 20 : Primitive de $x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, avec le discriminant de $ax^2 + bx + c$ strictement négatif. On prend l'exemple $x \mapsto \frac{3x+2}{2x^2+x+1}$ mais la méthode est générale.

- Etape 1, faire apparaître de $\lambda\frac{u'}{u}$. La dérivée de $x \mapsto 2x^2+x+1$ est $x \mapsto 4x+1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x+2 = \frac{3}{4}(4x+1) - \frac{3}{4} + 2 = \frac{3}{4}(4x+1) + \frac{5}{4}$. Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{3x+2}{2x^2+x+1} = \frac{3}{4}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{5}{4}\frac{1}{2x^2+x+1},$$
avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 2x^2+x+1$.
- Etape 2, faire apparaitre du $\mu\frac{v'}{1+v^2}$. On sait que $x \mapsto \frac{3}{4}\ln(|u(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3}{4}\frac{u'(x)}{u(x)}$. Il nous reste donc à intégrer le second terme. On se retrouve dans le cas de l'exemple précédent avec $\Delta < 0$. On factorise $2x^2+x+1$ de la façon suivante (on donne sa forme canonique) : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 2x^2+x+1 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) \\ &= \frac{2\times 7}{16}\left(\left(\sqrt{\frac{16}{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right) \\ &= \frac{7}{8}\left(\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right) = \frac{7}{8}\left(v(x)^2+1\right), \end{aligned}$$
avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right) = \frac{4x+1}{\sqrt{7}}$ et $v'(x) = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Donc
$$\frac{5}{4}\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{5}{4}\frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{v'(x)}{1+v(x)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}\frac{v'(x)}{1+v(x)^2}.$$
Finalement les primitives sont :
$$x \mapsto \frac{3}{4}\ln(|u(x)|) + \frac{5\sqrt{7}}{14}\arctan(v(x)) + C = \frac{3}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{5\sqrt{7}}{14}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

III.3 Théorème de décomposition en éléments simples

Théorème III.1 (Décomposition en éléments simples)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$ des réels ou des complexes **distincts**, $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p).$$
Alors il existe E un polynôme et $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ des réels ou complexes tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_p\}, \qquad f(x) = E(x) + \frac{\alpha_1}{x-x_1} + \dots + \frac{\alpha_p}{x-x_p}.$$

Remarque 21 :

1. Le polynôme E n'apparait que si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$ et s'appelle la partie entière. Il s'obtient en faisant la division euclidienne de P par Q : $P = EQ + R$ (cf second semestre, chapitre sur les polynômes) alors $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ et alors on se ramène toujours à décomposer une fraction avec $\deg(R) < \deg(Q)$.
2. Pour obtenir le coefficient α_1, par exemple, on commence par multiplier $f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)}$ par $(x-x_1)$. On a alors nécessairement une simplification avec le dénominateur : $(x-x_1)f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_2)\dots(x-x_p)}$. Une fois cette simplification faite, on évalue en x_1, on obtient alors d'un côté $\frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_p)}$ (à calculer) et de l'autre $(x_1-x_1)E(x) + \alpha_1 + \frac{\alpha_2(x_1-x_1)}{x_1-x_2} + \dots + \frac{\alpha_2(x_1-x_p)}{x_1-x_p} = \alpha_1$, ce qui nous permet donc de calculer α_1.

Exemple 22 : Calculons la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
On observe que $\deg\left(X^2+2X+5\right) = 2 = \deg\left(X^2-3X+2\right)$. On commence donc par écrire que
$$X^2+2X+5 = \left(X^2-3X+2\right)\times 1 + 5X + 3.$$

Donc
$$F = 1 + \frac{5X+3}{X^2-3X+2}.$$
On observe que 2 et 1 sont racines de X^2-3X+2. Par conséquent,
$$\tilde{F} = \frac{5X+3}{X^2-3X+2} = \frac{5X+3}{(X-2)(X-1)}.$$
Donc par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\tilde{F} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-2}.$$
En évaluant $(X-1)\tilde{F}$ en $X=1$,
$$\frac{5+3}{1-2} = -8 = \alpha.$$
De même, en évaluant $(X-2)\tilde{F}$ en $X=2$,
$$\frac{5\times 2+3}{2-1} = 13 = \beta.$$
Conclusion,
$$F = 1 + \tilde{F} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

Exemple 23 : Calculer la décomposition en éléments simples de $f : x \mapsto \frac{3x-9}{x^2-2x-35}$ puis en déduire les primitives de f sur un intervalle à choisir.

Exemple 24 : Calculer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^3-2x^2-3x}$.

Le cas plus général - Hors programme

Soit $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Q(x) = a\,(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\dots(x-x_p)^{n_p}\left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{m_1}\left(x^2+\beta_2 x+\gamma_2\right)^{m_1}\dots\left(x^2+\beta_q x+\gamma_q\right)^{m_q},$$
où chaque polynôme $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ possède un discriminant strictement négatif $\Delta_i<0$.
Alors il est toujours possible d'écrire f de la façon suivante :
$$f(x) = E(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_p(x) + G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_q(x),$$
avec E un polynôme et pour tout i,

$$F_i(x) = \frac{a_{i,1}}{x-x_i} + \frac{a_{i,2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{i,n_i}}{(x-x_i)^{n_i}}$$
$$G_i(x) = \frac{b_{i,1}x+c_{i,1}}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} + \frac{b_{i,2}x+c_{i,2}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^2} + \dots + \frac{b_{i,m_i}x+c_{i,m_i}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{m_i}}.$$

Exemple 25 : Il existe a, b, c, d, e, f, g, h tel que
$$f(x) = \frac{2x^4+3x^3+x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)^3(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}.$$

Exemple 26 : Calculer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+1}{2x^2-6x+4}$

IV Prochainement... Analyse asymptotique - Propriété des équivalents

Proposition IV.1 (Produits, puissances et inverse)

1. **Produit :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} l(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)l(x)$.
2. **Produit par un scalaire non nul :** soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.
3. **Puissances :** soit $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.
4. **Passage à l'inverse :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
5. **Passage à la valeur absolue :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Proposition IV.2 (Composition à droite / changement de variable)

Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ et si $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x))$.

Proposition IV.3 (Elimination des termes négligeables)

- *Suites :* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
- *Fonctions :* si $f = g + h$ sur I et $h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Anti-Proposition IV.4

1. **La somme.** L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \quad \Rightarrow \quad u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + t_n$ est **FAUSSE** en général (de même pour les fonctions). Par exemple, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $3-n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-n$ mais $4 = (n+1)+(3-n)$ n'est pas équivalent à $n + (1-n) = 1$.
2. **La composition à gauche.** L'assertion $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$ est **FAUSSE** en général (de même pour les suites). Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+\ln(x)$ mais e^x n'est pas équivalent en $+\infty$ à $\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = x\,\mathrm{e}^x$.

Exemple 27 : Déterminer un équivalent le plus simple possible.

1. $2x^4 - \sqrt{x} - x^2 + 12x \underset{x\to 0}{\sim}$
2. $\left(2x^4 - \sqrt{x} - x^2 + 12x\right)^3 \underset{x\to 0}{\sim}$
3. $\mathrm{e}^{-x} + 5 + \ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$
4. $\left(x + \sqrt{x^5 + x^7}\right)\sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim}$
5. $\sqrt{5n^3 - 2^n + n!} \underset{n\to+\infty}{\sim}$
6. $\ln\left(1 + x + x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim}$
7. $\sin\left(x + x^2\right) - x \underset{x\to 0}{\sim}$
8. $\ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}$

CAUCHY Augustin-Louis *(Paris 1789 - Sceaux 1857) est un mathématicien français. Fuyant la terreur avec sa famille, Cauchy s'installa à Arcueil et y rencontra Laplace. Très brillant élève, il entre à l'âge de seize ans à l'Ecole Polytechnique. Ingénieur militaire il travailla aux fortifications du port de Cherbourg avant de revenir à Paris et, encouragé par Lagrange, obtint en 1816 un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France. Il est élu la même année à l'Académie des sciences où il remplace Monge (évincé pour des raisons politiques). Légitimiste convaincu, Cauchy refusa de prêter allégeance à Louis-Philippe et s'exila en 1830. Il séjourna à Turin puis Prague. Dispensé du serment d'allégeance, il rentra en France en 1838 et retrouve son poste à Polytechnique où il enseigna jusqu'à sa mort. Son caractère agressif pour la défense de ses idées bigotes et légitimistes le mit en mauvais termes avec certains de ses collègues, parfois même avec ses anciens appuis. En tant que membre de l'Académie, il se devait de lire et de corriger des articles. Il lui sera vivement reproché d'avoir négligé les travaux d'Abel et de Galois, morts jeunes dans des conditions misérables mais dont les idées auront de grandes répercussions dans les mathématiques du vingtième siècle. L'oeuvre de Cauchy est considérable et ses travaux concernèrent tous les domaines des mathématiques, en particulier en algèbre linéaire et en équations différentielles. Il fournit également des bases mathématiques à certains domaines physiques. Son apport principal fut en analyse où il fut le premier à définir rigoureusement la notion de continuité et d'intégrale pour les fonctions continues. Dans ses travaux sur les équations différentielles, il est le premier à donner des preuves d'existence et d'unicité de solutions. Cauchy fut un mathématicien clé de son époque, à la jonction de la fin du dix-huitième siècle encore imprégné par la réalité physique et la seconde moitié du dix-neuvième siècle où l'on s'efforce d'élaborer une science rigoureuse qui prétend de plus en plus à se suffire à elle-même.*

Deux mathématiciennes discutent à un bar sur la connaissance des mathématiques du commun des mortels. L'une prétend qu'un citoyen lambda ne possède pratiquement aucune connaissance en mathématiques et serait bien incapable de donner une primitive de x^2 par exemple. La seconde se veut plus optimiste et lui affirme qu'elles vivent dans une société de plus en plus éclairée où la culture mathématique, indisponible pour un esprit bien fait, est plus répandue qu'elle ne croit. Alors que la première mathématicienne s'absente, la seconde interpelle un serveur, lui glisse un billet et lui dit :
« - Lorsque mon amie vous posera une question, vous lui répondrez $\frac{1}{3}x^3$.
-Inter deuzix hocub ?
-Presque, ça ira, retenez-le bien. »
Le serveur s'éloigne en répétant « Aintère de hicsocub ». La première mathématicienne revient et la seconde lui propose alors pour vérifier ses dires de demander à un serveur s'il sait intégrer la fonction carrée. La première accepte, interpelle le serveur et lui demande alors :
« Pouvez-vous me donner la primitive de x^2, je vous prie ? »
Le serveur lui répond alors avec une prononciation impeccable :
« -Un tiers de x au cube. »
La mathématicienne, surprise, s'extasie alors sur l'érudition de notre serveur et le remercie chaleureusement. Le serveur s'en retourne alors à ses tâches et murmure en s'éloignant « plus une constante, naturellement... ».