



Colle du 14/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la parité de f .
3. Poursuivre l'étude de f .

Exercice 2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n + m) = f(n)f(m).$$



Colle du 14/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, 2^n > n^2$.

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(|x|)}{x}}$.

Exercice 2. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$.



Colle du 14/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1)n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sin(\sqrt{x^2+1})}$. Etudier f .