Colle du 07/12 - Sujet 1
Equations différentielles

Question de cours. Décrire la méthode de variation de la constante.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 2. Résoudre $x(x-1)y' + (x+1)y = 0$.

Colle du 07/12 - Sujet 2
Equations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la structure affine des solutions d'une équation différentielle.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
On pourra poser $t = \frac{1}{x}$.

Colle du 07/12 - Sujet 3
Equations différentielles

Question de cours. Démonstration du lemme sur l'ensemble des solutions complexes d'une équation différentielle homogène d'ordre 2.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $xy' + (x-2)y = x^4$.

Exercice 2. Soit $I = \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. On pose

$$(E) \ : \quad \sin(x)y'' + \cos(x)y' + 2\sin(x)y = 0.$$

1. Résoudre sur I, (F) : $\cos(x)\sin(x)y' + \left(\cos^2(x) - 2\sin^2(x)\right)y = 0$.
2. Montrer que $\varphi = \cos$ est une solution de (E).
3. Soit y une fonction deux fois dérivable. On pose $z = y/z$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation que l'on précisera.
4. Montrer que
$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{\cos^2(x)\sin(x)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$
5. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).