Colle du 18/01 - Sujet 1
Ensembles, applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer les assertions sur les images et les images réciproques.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Exercice 2. Soit $I =]a\,;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit non nulle au voisinage de x_0.

Colle du 18/01 - Sujet 2
Ensembles, applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Etudier la régularité de f.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que

$$(\ f \text{ injective }) \quad \Leftrightarrow \quad (\ \forall A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').\ )$$

Colle du 18/01 - Sujet 3
Ensembles, applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer que l'image d'un intervalle par...

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose $A \Delta B$ l'ensemble des éléments dans A ou dans B mais pas dans les deux à la fois. Montrer que $A \Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.