Colle du 25/01 - Sujet 1
Ensembles, applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer les assertions sur les images et les images réciproques.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{2x\ln(x)}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$ en 1 ?
3. Déterminer la tangente de f en 1 et sa position relative au voisinage de 1.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (A,B) \in \mathscr{P}(X)^2, \quad A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 25/01 - Sujet 2
Ensembles, applications, continuité et dérivabilité

Question de cours. Démontrer que l'image d'un intervalle par...

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 2. *(Théorème de Darboux)* Soient $a < b$ et $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On veut montrer que f' vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose $f'(a) < f'(b)$, on fixe λ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ et on définit $\varphi : x \mapsto f(x) - \lambda x$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;\,b[$ tel que $\varphi(c) = \min_{t \in [a;b]} \varphi(t)$.
2. Conclure.