Colle du 01/02 - Sujet 1
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer la factorisation de P à partir de racines.

Exercice 1. Déterminer a, b et c tel que $P = X^6 + aX^4 + 10X^3 + bX + c$ admette une racine de multiplicité 4. Factoriser alors le polynôme.

Exercice 2. Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]0;1]$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels dans $]0;1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 01/02 - Sujet 2
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Cesàro.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}$.

1. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2. Soit $a > 0$.

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+a) - P(X) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+a) - P(X) = X^2$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 01/02 - Sujet 3
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème sur les suites adjacentes.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant $P'P'' = 18P$.