Colle du 07/02 - Sujet 1
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer la factorisation de P à partir de racines.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f \circ f(x) = 30x - f(x).$$

On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 07/02 - Sujet 2
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème sur les suites adjacentes.

Exercice 1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^{2022} + X^{2022} - 2$.

Exercice 2. Soit $u_1 \in \left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$.

1. Déterminer un encadrement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Déterminer la limite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \frac{2}{1-2u_1^2} u_n$.
5. En déduire la limite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 07/02 - Sujet 3
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Cesàro.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x + x - n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
4. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X+2)(X+1)XQ$.
2. Montrer que Q est constant et conclure.