# Colle du 15/02 - Sujet 1
## Espaces vectoriels et dimension

**Question de cours.** Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

**Exercice 1**. Déterminer la dimension et un supplémentaire de

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c-d = a-3b-2c = 0 \right\}.$$

**Exercice 2**. Soit $E = \mathscr{C}([0;1];\mathbb{R})$. On définit

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \right\} \qquad G = \{ g \in E \mid \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;1],\ g(t) = C \}.$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ et préciser la décomposition d'un élément $h \in E$.

---

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

# Colle du 15/02 - Sujet 2
## Espaces vectoriels et dimension

**Question de cours.** Démontrer la caractérisation par les bases adaptées de la somme directe.

**Exercice 1**. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{ P \in E \mid P(1) = P(2) = 0 \}$.

1. Montrer que $F$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $F$ puis un supplémentaire de $F$ dans $E$.

**Exercice 2**. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\left( \left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{k \in [\![1;p]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

# Colle du 15/02 - Sujet 3
## Espaces vectoriels et dimension

**Question de cours.** Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

**Exercice 1**. Soit $A = X^3 - 4X + 2$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}_5[X] \mid A|P \}$.

1. Montrer que $F$ un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_5[X]$ et déterminer un supplémentaire de $F$.
2. Même question pour $F_1 = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P \}$ dans $E_1 = \mathbb{R}[X]$.

**Exercice 2**. Soient $E$ un espace vectoriel et $A$ et $B$ deux familles de vecteurs de $E$ ayant au moins un élément en commun. Montrer que $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$. Discuter de la réciproque.