Colle du 08/03 - Sujet 1
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Démontrer la caractérisation par les bases adaptées de la somme directe.

Exercice 1. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Montrer que F et $\mathscr{D}$ sont des espaces vectoriels. Sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Soient $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \right\}$ et $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer un supplémentaire.

Colle du 08/03 - Sujet 2
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de dimension 4, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 et 2 respectivement.

1. Donner un encadrement le plus précis possible de $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.
2. On pose $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(a, b)$. Déterminer la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 2. Montrer que $F = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_3 = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et déterminer un supplémentaire de F.

Colle du 08/03 - Sujet 3
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

Exercice 1. On pose $E = \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis montrer que

$$F \oplus \mathrm{Vect}(g) = E.$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit H un hyperplan de E i.e. un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E \setminus H$.
2. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
3. Montrer qu'il existe une base de E qui ne contienne aucun vecteur ni de H ni de $a\mathbb{R}$.