Colle du 15/03 - Sujet 1
Séries numériques et analyse asymptotique

Question de cours. Démontrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. En utilisant la formule $\sin(2a) = \dots$ calculer la somme totale de la série.

Exercice 2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ y\neq 1}} \frac{y^y - y}{1 - y + \ln(y)}.$$

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 15/03 - Sujet 2
Séries numériques et analyse asymptotique

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$.

Exercice 2. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à terme positif convergente. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 15/03 - Sujet 3
Séries numériques et analyse asymptotique

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!2^n}$ converge et calculer sa somme totale.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.