Colle du 22/03 - Sujet 1
Séries numériques

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$ converge et calculer sa somme totale.

Exercice 2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(v_n^2\right)}{\ln\left(\frac{v_n+1}{v_n}\right)}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 22/03 - Sujet 2
Séries numériques

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent simple des sommes partielles associées.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 22/03 - Sujet 3
Séries numériques

Question de cours. Démontrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Exercice 2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. En étudiant la somme télescopique associée, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2 H_n}$.
3. Montrer que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$