



**Colle du 29/03 - Sujet 1**  
**Applications linéaires**

**Question de cours.** Énoncer et démontrer le théorème du rang.

**Exercice 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . On suppose  $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est surjective.
2. Soit  $x \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ . Montrer que  $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(x)$ .

**Exercice 2.**

1. Montrer que  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme.
2. Montrer que  $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{matrix}$ . Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme.



**Colle du 29/03 - Sujet 2**  
**Applications linéaires**

**Question de cours.** Démontrer la propriété sur l'image d'une base par...

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ X & \mapsto & (2X + 1)P + (1 - X^2)P' \end{matrix}$

1. Montrer que  $f$  est bien définie.
2. Montrer que  $f$  est linéaire.
3. Déterminer  $\text{Ker}(f)$ .
4. Si  $n = 2$  calculer  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 2.** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \times E \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{matrix}$

1. Montrer que  $\varphi$  est linéaire et déterminer son noyau et son image.
2. Même question si  $E = \mathbb{R}[X]$ . En déduire la dimension de  $\mathbb{R}[X]$ .



**Colle du 29/03 - Sujet 3**  
**Applications linéaires**

**Question de cours.** Montrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel.

**Exercice 1.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$ .
2. Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 2.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $U$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $A = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid U \subseteq \text{Ker}(f)\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Soit  $V$  un supplémentaire de  $U$  dans  $E$ . Montrer que  $A$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(V, E)$ .