Colle du 10/05 - Sujet 1
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule du vecteur image.

Exercice 1. Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé.

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 10/05 - Sujet 2
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule de la composition.

Exercice 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t+n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ canoniquement associé à M.

1. Déterminer u.
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Préciser M^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Colle du 10/05 - Sujet 3
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose enfin $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \mathrm{sh}(t) f\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. On prend $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, calculer alors F.