## Colle du 17/05 - Sujet 1
## Intégration et représentation matricielle

**Question de cours.** Démontrer la formule du vecteur image.

**Exercice 1.** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B} = \left((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1\right)$ et $\mathscr{C} = ((1,2,3), (1,2,0), (1,0,0))$. On admet que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$ tel que $\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

1. Calculer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
2. Calculer l'image de $3X^2 - 2X - 1$ par $u$.
3. La matrice $A$ est-elle inversible ?
4. Soit $\mathscr{B}' = \left(X^2-1, 4, 2X^2+2X+4\right)$. Calculer $\text{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(u)$.

**Exercice 2.** Soit $f$ une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

## Colle du 17/05 - Sujet 2
## Intégration et représentation matricielle

**Question de cours.** Démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

**Exercice 1.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Soit $U = 1 + X - X^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (U, f(1), f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de $f$ dans cette base.

**Exercice 2.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^3} \frac{1}{t^2\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

# Colle du 17/05 - Sujet 3
# Intégration et représentation matricielle

**Question de cours.** Démontrer la formule de la composition.

**Exercice 1**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |\cos(x) - P(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Le polynôme $P$ est-il unique ?

**Exercice 2**. Soient $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = \mathrm{Id}_E$. Posons $v = \mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^{p-1}$.

1. Calculer $u \circ v$.
2. En déduire $v^2$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(v)$ sont supplémentaires dans $E$.
4. Déterminer la matrice de $v$ dans une base adaptée à cette supplémentarité.