Colle du 07/06 - Sujet 1
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\, Q^{(k)}(a_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exercice 2.

1. Déterminer les valeurs de a pour que $A(2,3,1)$, $B(1,2,0)$, $C(3,1,-2)$ et $D(a,4,3)$ soient coplanaires.
2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{P}_m : m^2x + (2m-1)y + mz = 3$. Déterminer $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m$.

Exercice 3. On possède deux urnes A et B contenant au total $N \geqslant 2$ boules. On note X_n le nombre de boules contenues dans l'urne A. A chaque étape on choisit une boule parmi les N et on la change d'urne.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
2. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{N}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.
3. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{E}(X_k)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 07/06 - Sujet 2
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ m & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de M.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 - x + 4y + z^2 - 2z - 2 = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{P}_m$: $mx - 2y + z - 1 = 0$. Déterminer la nature de $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$.

Exercice 3. Lors d'une compétition, on a n tireurs qui tirent chacun deux fois dans une cible. On suppose tous les tirs indépendants et les tireurs tous exactement du même niveau. On note X le nombre de tireurs qui atteignent la cible au premier tire et Z le nombre de tireurs qui atteignent au moins une fois la cible lors des deux tirs.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Z ?
3. Quelle est la loi de $Y = Z - X$? A quoi correspond cette variable aléatoire ?
4. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$. Que peut-on en déduire ?

Colle du 07/06 - Sujet 3
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. Calculer le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Quand est-ce que M est inversible ?

Exercice 2. On lance un dé à six faces et on procède de la façon suivante : si le résultat est entre 1 et 5, on avance le pion du nombre de cases indiqué et si le résultat est 6, on recule le pion de 3 cases.

1. Calculer le numéro moyen de la case à laquelle se trouve le pion à l'étape n.
2. On pose X_n le nombre de fois que le pion à avancé durant les n premières étapes. Quelle est la loi de X_n ?
3. Soit S_n le numéro de la case à laquelle se trouve le pion à l'étape n. Exprimer S_n en fonction de X_n et d'une variable uniforme sur $[\![1;5]\!]$.
4. Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan les contenant.