Colle du 14/06 - Sujet 1
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -1 & -1 \\ a & a & 0 & -1 \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 2. On considère $\mathcal{D} : \begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$, $\Omega\,(0, 1, c)$ et $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

1. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{D}$.
2. Préciser $\mathcal{C}$.
3. Montrer que Ω est sur l'axe de $\mathcal{C}$.
4. Soit $\mathcal{S}$ la sphère contenant $\mathcal{C}$ de centre Ω. Déterminer son rayon.
5. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{D}$ et préciser alors le plan tangent à la sphère dans ces cas.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable un nombre m entre 1 et n. Puis une fois ce nombre m choisi, on tire un second nombre entre 1 et m. On note X le premier nombre obtenu et Y le second.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Soit $j \in [\![1; n$. Exprimer $\mathbb{P}\,(Y = j)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. En déduire $\mathbb{E}\,(Y)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2021-2022

Colle du 14/06 - Sujet 2
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. On note E l'ensemble des suites réelles bornées. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k \,\mathrm{e}^{-k}, \end{array}$$

est un produit scalaire.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. On tire successivement, avec remise, de façon équiprobable et indépendante des autres tirages, une boule. On pose $X_1 = 1$ et pour tout $n \in [\![2; N]\!]$ on note X_i la variable aléatoire valant 1 si le numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage n'avait pas été obtenu au cours des précédents tirages et 0 dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Soit $k \in [\![1; N]\!]$. Déterminer la loi de X_k.
3. Montrer que si $i < j$, on a $\mathbb{P}\,((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
5. On note Z_N le nombre de numéros distincts obtenus lors des N tirages. Déterminer l'espérance de Z.

Exercice 3. On considère les plans

$$\mathcal{P}_1 : ax + y + z + 1 = 0$$
$$\mathcal{P}_2 : x + ay + z + a = 0$$
$$\mathcal{P}_3 : x + y + az + b = 0$$

Déterminer les réels a et b pour que l'intersection de ces trois plans soient une droite. Préciser dans ce cas l'équation cartésienne et paramétrique de la droite.

Colle du 14/06 - Sujet 3
Couples de variables aléatoires et géométrie

Exercice 1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$.

Exercice 2. Dans l'espace, on considère $\mathcal{A} : \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{B} : \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$.

1. Reconnaitre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont contenus dans une sphère dont on déterminera les caractéristiques.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On tire un nombre N de façon équiprobable entre 1 et n puis on lance N fois une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la pièce retourne pile au k-ième lancer. On suppose les lancers indépendants. On note enfin $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, la variable aléatoire retournant le nombre de piles obtenues à l'issue de l'expérience.

1. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Préciser les lois de N, X_k et de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(S_N = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(S_N = 0) = \frac{1-p}{np}\left(1 - (1-p)^n\right).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sans calcul, justifier que

$$\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = kp.$$

4. En déduire $\mathbb{E}(S_N)$.