



Colle du 16/11 - Sujet 1
Calcul algébrique et équations complexes

Question de cours. Énoncer et démontrer l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux familles de complexes. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $B_k = \sum_{i=0}^k b_i$. Montrer que

$$a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k = \sum_{k=0}^n a_k b_k.$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i \tan(a)}{1-i \tan(a)}$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$. Préciser les valeurs possibles de a puis résoudre l'équation.



Colle du 16/11 - Sujet 2
Calcul algébrique et équations complexes

Question de cours. Énoncer et démontrer la valeur de la somme des premiers carrés.

Exercice 1. Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0.$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Exercice 2. En remarquant que $4 = 7 - 3$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que 7 divise $2^{4n+2} + 3^{2n+1}$.



Colle du 16/11 - Sujet 3
Calcul algébrique et équations complexes

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule de Newton.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que z , z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 2.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, développer $\text{sh}(2a)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n = \prod_{k=1}^n \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.