Programme de colles 08
Ensembles, Applications, Continuité et dérivation

Quinzaine du 17 au 28 janvier

Ensembles et applications

1. **Ensembles :** A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.
3. Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
4. Complémentaire $\overline{A}$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
5. Produit cartésien d'ensembles.
6. **Applications :** définition, image, antécédent, graphe.
7. Application identité, fonctions indicatrices.
8. Composition, restriction, prolongement.
9. Image directe, image réciproque. Image directe et réciproque de l'union, de l'intersection.
10. Injection, surjection, bijection.

Limite, Continuité, Dérivation

1. Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Unicité de la limite. Limite à droite, à gauche. Somme, produit, quotient, valeur absolue de limites. Composition de limites. Passage à la limite dans les inégalités.
3. Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
4. Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration. Théorème de la limite monotone. Caractérisation séquentielle de la limite.
5. Continuité : définition. Continuité à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection. Image d'un segment par une fonction continue.
7. Définition de la dérivabilité en ε, dérivabilité à droite, à gauche. Rappel du lien avec un DL à l'ordre 1 et avec la tangente.
8. Fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$, formule de Leibniz.
9. Tout extremum intérieur est un point critique, théorème de Rolle.
10. Identité des accroissements finis. Lien entre la monotonie de f et le signe de f'.
11. Théorème des accroissements finis, définition d'une fonction lipschitzienne. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.
12. Extension aux fonctions complexes : caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, théorème des accroissements finis.

Questions de cours

1. Démontrer les deux assertions suivantes :
   (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer l'unicité de la limite.
3. Démontrer que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

1. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$, alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Démonstration.

1. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \\ & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,.}$$

2. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

   Conclusion

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,.}$$

□

Proposition (démo 2)

Soit I un voisinage de $+\infty$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors, cette limite est unique

Démonstration. Soit $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$, tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell'$. Montrons que $\ell = \ell'$. Procédons par l'absurde. On suppose que $\ell \neq \ell'$. Par symétrie des hypothèse sur ℓ et ℓ', on peut supposer que $\ell > \ell'$ donc $\ell - \ell' > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{l - l'}{3}$. On a donc $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$x \geqslant A_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier $f(x) \geqslant \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - \ell'}{3} = \frac{2\ell + \ell'}{3}$.
D'autre part, il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$x \geqslant A_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier $f(x) \leqslant \ell' + \varepsilon < \ell' + 2\,\varepsilon$ car $\varepsilon > 0$ et donc $f(x) < \ell' + 2\frac{\ell - \ell'}{3} = \frac{2\ell + \ell'}{3}$. On pose $A = \max(A_1, A_2)$. Alors, pour $x \in I$, si $x \geqslant A$, on a $x \geqslant A_1$ et $x \geqslant A_2$. Par conséquent,

$$\begin{cases} f(x) \geqslant \frac{2\ell + \ell'}{3} \\ f(x) < \frac{2\ell + \ell'}{3}. \end{cases}$$

D'où $f(x) < f(x)$ ce qui est absurde. Conclusion,

$$\boxed{\ell = \ell'.}$$

□

Proposition (démo 3)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Posons $J = f(I)$. Montrons que J est un intervalle i.e. montrons que

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2, \qquad [\alpha; \beta] \subseteq J.$$

Soient $(\alpha, \beta) \in J^2$. Montrons que $[\alpha; \beta] \subseteq J$. Soit $\gamma \in [\alpha; \beta]$. Puisque $\alpha \in J = f(I)$, il existe $a \in I$ tel que $\alpha = f(a)$. De même, $\beta \in J$ donc il existe $b \in I$ tel que $\beta = f(b)$. Ainsi,

$$\gamma \in [\alpha; \beta] = [f(a); f(b)] \text{ i.e. } f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b).$$

Or f est continue sur $[a; b]$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $\gamma = f(c)$. Enfin, puisque I est un intervalle :

$$\begin{cases} a \in I \\ b \in I \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad [a; b] \subseteq I.$$

Donc $c \in I$ et par suite $\gamma = f(c) \in f(I) = J$. Ceci étant vrai pour tout $\gamma \in [\alpha; \beta]$, on en déduit bien que $[\alpha; \beta] \subseteq J$. Conclusion,

$$\boxed{J = f(I) \text{ est un intervalle.}}$$

$\square$