Devoir Maison 1
Logique & Fonctions réelles

A faire pour le mardi 14 septembre

Exercice I - Logique

Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que f et g commutent si et seulement si $f \circ g = g \circ f$. On s'intéresse à déterminer le centre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ i.e. l'ensemble

$$\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f \}.$$

1. Traduire à l'aide de quantificateur le prédicat $P(f,g)$: « f et g commutent » puis le nier.
2. A l'aide du prédicat P, donner la traduction mathématique des assertions suivantes :
   (a) A : « toutes les fonctions commutent entre elles »
   (b) B : « toutes les fonctions commutent avec au moins une fonction »
   (c) C : « il existe un couple de fonctions qui commutent »
   (d) D : « il existe une fonction qui commute avec toutes les fonctions »
3. Nier chacune des assertions précédentes.
4. En expliquant brièvement en français, compléter $\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots$ à l'aide de A, B, C et D.
5. (a) Déterminer la valeur de vérité de D *(preuve à l'appui !)*
   (b) Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$?
   (c) En déduire la valeur de vérité de B et C.
6. (a) Déterminer la valeur de vérité de A.
   (b) Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$?

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère l'implication suivante :

$$f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})) \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

7. Enoncer mathématiquement la réciproque, la négation et la contraposée de cette implication.
8. La réciproque est-elle vraie ?
9. Démontrer la contraposée. *On pourra chercher g du côté des fonctions constantes.*
10. Quelle équivalence peut-on en déduire ?
11. Compéter alors l'assertion suivante avec les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et/ou ! :

$$\ldots\ldots\ldots f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \ldots\ldots\ldots g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \circ g = g \circ f.$$

Exercice II - Complexe

Soit $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer z^2, z^4, z^8 et préciser la partie réelle et la partie imaginaire de chacun de ces complexes.

Exercice III - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 2x^3 - 1 + 2\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie 1 : Etude de g

1. Déterminer I le domaine de définition de g.
2. Déterminer la parité de g.
3. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$.
6. Justifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.
7. Quel est le signe de $\ln(\alpha)$? En déduire que $2\alpha^3 - 1 > 0$.

Partie 2 : Etude de f

8. Justifier que f est bien définie et dérivable sur I.
9. Exprimer sa dérivée en fonction de g.
10. Déterminer le tableau de variation complet de f en fonction de α et $\beta = f(\alpha)$.
11. La fonction f est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
12. Montrer que $\beta > 1$.
13. On note γ l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]0; \alpha[$. Sans justification, déterminer (éventuellement en fonction de α, β ou γ) les ensembles suivants :

    (a) $f(]0;1[)$ (b) $f([\alpha; +\infty[)$ (c) $f^{\leftarrow}([1; +\infty[)$ (d) $f^{\leftarrow}([2; +\infty[)$

14. Montrer que le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.
15. Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.
16. Donner une représentation graphique du graphe de f.

Exercice IV - Rechercher (facultatif)

Déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x)) = x + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x) - 1) = 1 - x.$$