Devoir Maison 10
Intégration et représentation matricielle

A faire pour le mardi 24 mai

Exercice I - Intégration

mais aussi application linéaire, équation différentielle, suite numérique et même série numérique...

Soient $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$,

$$\varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \end{array}$$

Partie 1 : Prise de contact

1. Justifier que φ est bien définie sur E et démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Préciser pour tout $f \in E$, $\varphi(f)(0)$. En déduire que φ n'est pas surjective.
3. Soient $e_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $e_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $A = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Déterminer une base de $\varphi(A)$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : t \mapsto t\cos^{2n+1}(t)$. Calculer $\varphi(f)(\pi)$.
   On pourra effectuer un changement de variable.

Partie 2 : Régularité et équation différentielle

Soit $f \in E$ et F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

5. Montrer que $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $\varphi(f)'$ en fonction de F.
6. En déduire que $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^2$ et préciser sa dérivée seconde.
7. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ?
8. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\varphi(f) = f + 1$.

Partie 3 : Etude d'un exemple

On fixe dans tout le reste de ce problème $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

9. Soit $x \in [1; +\infty[$. Justifier que $\varphi(f)(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$.
10. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(f)(x) = +\infty$.
11. Déterminer la parité de $\varphi(f)$.
12. Dresser le tableau de variation de $\varphi(f)$ sur $\mathbb{R}$.
13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.
14. Pour $t \in \mathbb{R}$, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exp à l'ordre n entre 0 et $-t^2$.
15. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{2(k+1)!\,(2k+1)} \right| \leqslant \frac{x^{2n+4}}{2(n+2)!\,(2n+3)}$$

Partie 4 : Une suite d'intégrales

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \varphi\left(f^n\right)(1),$$
où l'on précise que f^n désigne bien le produit $f \times f \times \cdots \times f$. On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$J_n = \int_{\frac{1}{n^{1/4}}}^{1} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t.$$

16. Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
17. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \geqslant \mathrm{e}^{-1} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1 - t\,\mathrm{d}t$.
19. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n$ diverge.

Exercice II - Représentation matricielle

Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère l'application
$$f : \qquad M \mapsto \frac{1}{2}\left(M + {}^tM + \mathrm{Tr}(M)\,U + \mathrm{Tr}(VM)\,V\right).$$
On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 1 : Noyau, image

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Calculer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Calculer $\mathrm{rg}(A)$.
4. En déduire $\mathrm{Ker}(A)$ puis $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ puis de $\mathrm{Im}(f)$.

Partie 2 : Trigonalisation et application aux calculs des puissances

6. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
7. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
8. Déterminer $X \in E$ tel que $f(X) = X + U$.
9. Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ une base de E, contenant I_2, telle que
$$T = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
10. Préciser $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$.
11. Déterminer les coordonnées de $x = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer T^n et en déduire A^n.

Partie 3 : Dans une autre base

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Montrer que $\mathscr{B}_u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E et déterminer $Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_u}$ et $Q' = P_{\mathscr{B}_u,\mathscr{C}}$.
14. En déduire $B = \text{mat}_{\mathscr{B}_u}(f)$.
15. Calculer $R = Q^{-1}P$ et justifier (sans calcul !) que $R \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$.
16. Exprimer B en fonction de R et T.

Partie 4 : Application à la résolution d'un système d'équations différentielles

On cherche $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} f_1' = f_1 - f_2 \\ f_2' = 2f_2 + \frac{f_3}{2} \\ f_3' = f_3 \\ f_4' = -f_1 - f_2 - f_3. \end{cases}$$

On pose $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}$. Puisque les f_i sont dérivables, on dit que F est dérivable et on note $F' = \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \end{bmatrix} : t \mapsto \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \\ f_4'(t) \end{bmatrix}$. On pose enfin $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = R^{-1}F$.

17. Ecrire matriciellement l'équation $(\bigstar)$ et en déduire une équation différentielle matricielle vérifiée par G en fonction de T.
18. Pour tout $i \in [\![1; 4]\!]$ déterminer g_i en fonction d'une constante C_i.
19. En déduire F en fonction des C_i puis déterminer l'unique solution de $(\bigstar)$ vérifiant $F(0) = (4, 1, 2, -1)$.