Correction du Devoir Maison 10
Intégration et représentation matricielle

Du mardi 24 mai

Exercice I - Intégration

mais aussi application linéaire, équation différentielle, suite numérique et même série numérique...

Soient $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$,

$$\varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x (x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Partie 1 : Prise de contact

1. Soit $f \in E$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $t \mapsto (x-t)\, f(t)$ est continue sur le segment $[0; x]$ (ou $[x; 0]$). Donc $\varphi(f)(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\varphi(f)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $f \in E$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } E.}$$

Soit $f \in E$. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\hat{F} : x \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque les fonctions f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème fondamental de l'analyse, F et $\hat{F}$ sont bien définies et sont des primitives de f et $t \mapsto tf(t)$ respectivement. Donc F et $\hat{F}$ sont a fortiori dérivable et donc continues sur $\mathbb{R}$. Or on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)(x) = xF(x) - \hat{F}(x).$$

Donc comme produit et différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(f)$ est continue i.e. $\varphi(f) \in E$. Ceci étant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit bien que φ va de E dans E.

Montrons de plus que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(f, g) \in E^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (x-t)\,(\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^x (x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^x (x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'évaluation et de l'intégrale} \\ &= \lambda\,\varphi(f)(x) + \mu\,\varphi(g)(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\varphi(f) + \mu\,\varphi(g).$$

Donc φ est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E : \varphi \in \mathscr{L}(E).}$$

2. Soit $f \in E$. On a directement,

$$\varphi(f)(0) = \int_0^0 (-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc toutes les images par φ s'annule en 0. En particulier la fonction constante $g : x \mapsto 1$ est un élément de E qui ne s'annule pas en 0 et donc $g \notin \mathrm{Im}(\varphi)$. Ainsi $\mathrm{Im}(\varphi) \neq E$. Conclusion,

$$\boxed{\forall f \in E,\ \varphi(f)(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi \text{ n'est pas surjective.}}$$

3. Soient $e_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $e_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $A = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$. La famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de A par définition. Donc par linéarité de f,

$$\varphi\,(A) = \varphi\,(\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)) = \mathrm{Vect}\,(\varphi\,(e_1)\,, \varphi\,(e_2))\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi\,(e_1)\,(x) = \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Procédons à une intégration par partie. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = x - t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = -1. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\varphi\,(e_1)\,(x) = \left[(x-t)\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0 - x + \left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} = \mathrm{e}^x - 1 - x.$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\varphi\,(e_2)\,(x) &= \int_0^x (x-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-(x-t)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (-1)\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= 0 + x - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Posons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ et $f_2 : x \mapsto x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{F} = (f_1, f_2)$. Alors, on a $f\,(A) = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ i.e. $\mathscr{F}$ engendre $f\,(A)$. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}
\lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2 = 0_E \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1\,f_1(x) + \lambda_2\,f_2(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1\,\mathrm{e}^x - \lambda_1 - \lambda_1\,x + \lambda_2\,x - \lambda_2 + \lambda_2\,e^{-x} = 0.
\end{aligned}$$

Les fonctions étant dérivables, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1\,\mathrm{e}^x - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2\,e^{-x} = 0.$$

En particulier, en $x = 0$,

$$\lambda_1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 = 2\,\lambda_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_2 = 0.$$

En évaluant la dérivée en 1, on obtient également,

$$\lambda_1\,\mathrm{e} - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2\,e^{-1} = \lambda_1\,(\mathrm{e} - 1) + 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 0 \qquad\qquad \text{car } \mathrm{e} \neq 1.$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc $\mathscr{F}$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{F} = \left(x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x, x \mapsto x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \text{ est une base de } \varphi\,(A).}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : t \mapsto t\cos^{2n+1}(t)$. Par définition,

$$\varphi(f)(\pi) = \int_0^{\pi} (\pi - t)\, t\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $s = \pi - t$ alors $\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\begin{aligned}\varphi(f)(\pi) &= \int_{\pi}^{0} (s)(\pi - s)\cos^{2n+1}(\pi - s)(-1)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{\pi} s(\pi - s)(-1)^{2n+1}\cos^{2n+1}(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^{\pi} s(\pi - s)\cos^{2n+1}(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\,\varphi(f)(\pi).\end{aligned}$$

Nécessairement, on en déduit que

$$\boxed{\varphi(f)(\pi) = 0.}$$

Partie 2 : Régularité et équation différentielle

Soit $f \in E$ et F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

5. Par le théorème fondamental de l'analyse, on sait que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Posons à nouveau $\hat{F} : x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$. Comme vu en question 1. on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)(x) = xF(x) - \hat{F}(x).$$

Puisque F et $\hat{F}$ sont deux primitives, ces fonctions sont notamment dérivables. De plus $F' = f$ et $\hat{F}' : t \mapsto tf(x)$. Donc leurs dérivées sont continues et donc F et $\hat{F}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme produit et différence de deux fonctions $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)'(x) = F(x) + xF'(x) - \hat{F}'(x) = F(x) + xf(x) - xf(x) = F(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi(f)' = F.}$$

6. Puisque F est $\mathscr{C}^1$ (en tant que primitive de f continue) et $\varphi(f)' = F$ par la question précédente, on en déduit que $\varphi(f)'$ est $\mathscr{C}^1$ i.e. $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^2$. De plus,

$$\varphi(f)'' = F' = f.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \varphi(f)'' = f.}$$

7. Soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ i.e. $\varphi(f) = 0_E$. Par la question précédente, on en déduit que

$$f = \varphi(f)'' = 0_E'' = 0_E.$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \{0_E\}$. Réciproquement, $\{0_E\} \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$ car $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \varphi \text{ est injevtive.}}$$

8. Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f) = f + 1$. Par les questions précédentes, on sait que $\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, donc $f = \varphi(f) - 1 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. De plus, en dérivant deux fois, on obtient
$$\varphi(f)'' = f'' \qquad \Leftrightarrow \qquad f = f'' \qquad\qquad \text{par la question 6.}$$
Donc f est solution de l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants $f'' - f = 0$ dont l'équation caractéristique est donnée par $r^2 - 1 = 0$ ayant deux racines $r = 1$ et $r = -1$. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t}.$$
Attention, nous n'avons raisonné que par implication, une synthèse/réciproque s'impose. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t}$. Autrement dit, avec les notations de la question 3.
$$f = Ae_1 + Be_2.$$
Donc par linéarité de φ,
$$\varphi(f) = A\,\varphi(e_1) + B\,\varphi(e_2).$$
Toujours par la question 3.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)(x) = A(\mathrm{e}^x - 1 - x) + B\left(x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = (B - A)\,x - (A + B) + f(x).$$
On obtient alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \varphi(f) = f + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (B - A)\,x - (A + B) + f(x) = f(x) + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (B - A)\,x - (A + B) - 1 = 0. \end{aligned}$$
On peut évaluer en 0 et 1 par exemple pour trouver A et B. On peut aussi passer par les polynômes. Soit $P = (B - A)\,X - (A + B) - 1$. Par ce qui précède, P s'annule sur $\mathbb{R}$ donc possède une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Par unicité des coefficients d'un polynôme :
$$\begin{aligned} \varphi(f) = f + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} B - A = 0 \\ -A - B - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B \\ -2A - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; A = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\; f(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} = -\operatorname{ch}(t). \end{aligned}$$
Conclusion, on obtient une unique solution :
$$\boxed{\varphi(f) = f + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = -\operatorname{ch}.}$$

Partie 3 : Etude d'un exemple

On fixe dans cette partie $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

9. Soit $x \in [1; +\infty[$. Par définition puis la relation de Chasles,
$$\varphi(f)(x) = \int_0^x (x - t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (x - t)\,f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x (x - t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Or pour tout $t \in [1; x]$, $f(t) > 0$ et $x - t \geqslant 0$. Donc $(x - t)\,f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale CAR $x \geqslant 1$ (important !)
$$\int_1^x (x - t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
D'où
$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \qquad \varphi(f)(x) \geqslant \int_0^1 (x - t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

10. Soit $x \geqslant 1$, par la question précédente, $\varphi(f)(x) \geqslant \int_0^1 (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$. Or pour tout $t \in [0;1]$,

$$0 < \mathrm{e}^{-1} < f(t) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x-1 \leqslant x-t.$$

Les deux termes étant positifs, par produit, on obtient que

$$\forall t \in [0;1], \qquad 0 \leqslant (x-1)\,\mathrm{e}^{-1} \leqslant (x-t)\, f(t).$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f)(x) \geqslant \int_0^1 (x-1)\,\mathrm{e}^{-1}\, \mathrm{d}t = (x-1)\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\,\mathrm{e}^{-1} = +\infty$. Donc par le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(f)(x) = +\infty.}$$

11. On a déjà vu que puisque $f \in E$, alors $\varphi(f) \in E$ et donc est notamment définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(f)(-x) = \int_0^{-x} (-x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_{-x}^0 (x+t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Posons $s = -t$ i.e. $t = -s$ et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$. Ainsi,

$$\varphi(f)(-x) = \int_x^0 (x-s)\,\mathrm{e}^{-s^2}\,(-1)\, \mathrm{d}s = \int_0^x (x-s)\,\mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s = \varphi(f)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. On conclut que

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est paire.}}$$

12. Par ce qui précède, on sait que $\varphi(f)$ est dérivable et $\varphi(f)' = F$, où F est l'unique primitive de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0.$$

Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $F(0) = 0$. Donc F est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(f)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Or $\varphi(f)(0) = 0$ et par la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(f)(x) = +\infty$. Par parité, on obtient directement que $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(f)(x) = +\infty$. Conclusion,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(f)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $t \in [0; x]$,
$$0 < \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \underset{(!)}{\leqslant} (x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant x - t \qquad \text{car } x - t > 0.$$
Par croissance de l'intégrale CAR $x \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \int_0^x x - t \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2}.$$
Si $x \leqslant 0$, en posant $y = -x \geqslant 0$, on a par ce qui précède,$0 \leqslant \varphi(f)(y) \leqslant \frac{y^2}{2}$ i.e.
$$0 \leqslant \varphi(f)(-x) \leqslant \frac{(-x)^2}{2}.$$
Par parité de $\varphi(f)$,
$$\forall x \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.}$$

14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_-$. La fonction exp est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x; 0]$. Donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,
$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \sup_{z \in [x;0]} \left|\exp^{(n+1)}(z)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Or $\sup_{z\in[x;0]} \left|\exp^{(n+1)}(z)\right| = \sup_{z\in[x;0]} |\mathrm{e}^z| = 1$. Ainsi,
$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
En posant $x = -t^2 \in \mathbb{R}_-$, on obtient
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left|\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.}$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, pour tout $t \in [0; x]$,
$$\left|\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}$$
Puisque $x - t \geqslant 0$, on en déduit que
$$(x-t)\left|\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}\right| \leqslant (x-t)\,\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}$$

ou encore
$$\left|(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(xt^{2k}-t^{2k+1}\right)\right|\leqslant\frac{xt^{2n+2}-t^{2n+3}}{(n+1)!}.$$
Par croissance de l'intégrale, car $x\geqslant 0$, on a
$$\int_0^x\left|(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(xt^{2k}-t^{2k+1}\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{xt^{2n+2}-t^{2n+3}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t.$$
Or, en posant $A(t)=(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}-\sum_{k=0}^{n}\left(x\frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}-\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!}\right)$, par l'inégalité triangulaire, car $x\geqslant 0$, on a
$$\left|\int_0^x(x-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(xt^{2k}-t^{2k+1}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|A(t)|\,\mathrm{d}t.$$
Donc
$$\begin{aligned}
&\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^x xt^{2k}-t^{2k+1}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x xt^{2n+2}-t^{2n+3}\,\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\;&\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left[x\frac{t^{2k+1}}{2k+1}-\frac{t^{2k+2}}{2k+2}\right]_{t=0}^{t=x}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left[x\frac{t^{2n+3}}{2n+3}-\frac{t^{2n+4}}{2n+4}\right]_{t=0}^{t=x}\\
\Leftrightarrow\;&\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x^{2k+2}}{2k+1}-\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x^{2n+4}}{2n+3}-\frac{x^{2n+4}}{2n+4}\right)\\
\Leftrightarrow\;&\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{k!}\,\frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)}\right|\leqslant\frac{x^{2n+4}}{(n+1)!}\,\frac{2n+4-2n-3}{(2n+3)(2n+4)}\\
\Leftrightarrow\;&\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{k!\,(2k+1)(2k+2)}\right|\leqslant\frac{x^{2n+4}}{(n+1)!\,(2n+3)(2n+4)}.
\end{aligned}$$
Aaaaaah ! Un petit calcul comme on les aime. Conclusion,
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad\left|\varphi(f)(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{2(k+1)!\,(2k+1)}\right|\leqslant\frac{x^{2n+4}}{2(n+2)!\,(2n+3)}.}$$

Partie 4 : Une suite d'intégrales

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad I_n=\varphi(f^n)(1),$$
où l'on précise que f^n désigne bien le produit $f\times f\times\cdots\times f$. On définit également pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$J_n=\int_{\frac{1}{n^{1/4}}}^{1}(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad K_n=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t.$$

16. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On observe que pour tout $t\in\left[\frac{1}{n^{1/4}};1\right]$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant t^2\leqslant 1\qquad\Rightarrow\qquad -1\leqslant -t^2\leqslant-\frac{1}{\sqrt{n}}\qquad\Rightarrow\qquad -n\leqslant -nt^2\leqslant-\sqrt{n}.$$
Donc par croissance de la fonction exponentielle,
$$0<\mathrm{e}^{-nt^2}\leqslant\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

De plus, pour tout $t \in \left[\frac{1}{n^{1/4}};1\right]$ $1-t \geqslant 0$, donc

$$\forall t \in \left[\frac{1}{n^{1/4}};1\right], \qquad 0 \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale car $\frac{1}{n^{1/4}} \leqslant 1$, on a

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_{\frac{1}{n^{1/4}}}^{1} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n^{1/4}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles, on a

$$I_n = \int_0^1 (1-t)\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t + J_n.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$. Or pour tout $t \in \left[0;\frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1$. Donc

$$\forall t \in \left[0;\frac{1}{n^{1/4}}\right], \qquad 0 \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1.$$

Par croissance de l'intégrale, car $\frac{1}{n^{1/4}} \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant H_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{n^{1/4}}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{1/4}}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1/4}} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = 0.$$

De plus par la question précédente, on a $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = H_n + J_n$. Conclusion,

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on a

$$0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \geqslant -nt^2 \geqslant -1.$$

Par croissance de l'exponentielle et positivité de $1-t$,

$$\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad (1-t)\,\mathrm{e}^{-1} \leqslant (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$, on en déduit que

$$K_n \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t)\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-t\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K_n \geqslant \mathrm{e}^{-1}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-t\,\mathrm{d}t.}$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par la relation de Chasles à nouveau (en découpant cette fois en $\frac{1}{\sqrt{n}}$). On obtient que

$$I_n = K_n + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}; 1\right]$, $(1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2} \geqslant 0$. Donc par positivité de l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} (1-t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$I_n \geqslant K_n.$$

Donc par la question précédente

$$I_n \geqslant \mathrm{e}^{-1} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1 - t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right).$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)$. Alors,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}} > 0$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}$ diverge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leqslant 1$. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant u_n$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}} \geqslant 0$. On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \geqslant u_n \geqslant 0.$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge, par le théorème de comparaison pour les séries, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \text{ diverge.}}$$

Exercice II - Représentation matricielle

Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère l'application

$$f: \qquad M \mapsto \frac{1}{2}\left(M + {}^tM + \mathrm{Tr}(M)\,U + \mathrm{Tr}(VM)\,V\right).$$

On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 1 : Noyau, image

1. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(M,N)\in E^2$. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda M+\mu N) &= \frac{1}{2}\left(\lambda M+\mu N+{}^t(\lambda M+\mu N)+\mathrm{Tr}(\lambda M+\mu N)U+\mathrm{Tr}(V(\lambda M+\mu N))V\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda M+\mu N+\lambda\,{}^tM+\mu{}^tN+\lambda\,\mathrm{Tr}(M)U+\mu\mathrm{Tr}(N)U+\mathrm{Tr}(\lambda VM+\mu VN)V\right)\\
&\qquad\qquad\text{par linéarité de la transposée et de la trace}\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda M+\mu N+\lambda\,{}^tM+\mu{}^tN+\lambda\,\mathrm{Tr}(M)U+\mu\mathrm{Tr}(N)U\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\lambda\,\mathrm{Tr}(VM)V+\mu\mathrm{Tr}(VN)V\right)\\
&= \lambda f(M)+\mu f(N).
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus, si $M\in E$, alors ${}^tM\in E$, $U\in E$, $V\in E$ et donc $f(M)\in E$. Donc f va bien de E dans E. Conclusion,

$$\boxed{f\in\mathscr{L}(E).}$$

2. Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in E$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(M) &= \frac{1}{2}\left(M+{}^tM+\mathrm{Tr}(M)U+\mathrm{Tr}(VM)V\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)U+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)V\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}+(a+d)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}\right)V\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3a+d&b+c\\b+c&d-a\end{pmatrix}+(b+c)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3a+d&2b+2c\\2b+2c&d-a\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $a=1$, $b=c=d=0$,

$$f(e_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}e_1-\frac{1}{2}e_4.$$

Donc

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_1))=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\0\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

De même,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_2))=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix},\qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_3))=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix},\qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_4))=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&1\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}.}$$

3. Par les opérations élémentaires suivantes, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \\
&= \operatorname{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & L_3 \leftrightarrow L_4
\end{aligned}$$

La matrice obtenue possède trois pivots. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 3.}$$

4. Par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 4 - \operatorname{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

Donc $\operatorname{Ker}(A)$ est une droite vectoriel et donc engendré par un seul vecteur non nul. Or, on observe que $C_2 = C_3$ i.e. $C_2 - C_3 = 0$. Donc

$$u_K = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(A).$$

Le vecteur u_K étant non nul il constitue une famille libre de $\operatorname{Ker}(A)$. Or $\operatorname{Card}((u_K)) = 1 = \dim(\operatorname{Ker}(A))$, on en déduit que (u_K) est une base de $\operatorname{Ker}(A)$:

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).}$$

Or u_K est la représentation matricielle dans $\mathscr{C}$ de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(W) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(A) &= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \text{car } C_2 = C_3.
\end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}3\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I} \qquad \begin{matrix}C_1 \leftarrow 2C_1\\ C_4 \leftarrow 2C_4\end{matrix}$$

$\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}\,(A)$. De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 3 = \mathrm{rg}\,(A) = \dim(\mathrm{Im}\,(A))$. Donc $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}\,(A)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}3\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \text{est une base de } \mathrm{Im}\,(A)\,.}$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{est une base de } \mathrm{Im}\,(f)\,.}$$

Partie 2 : Trigonalisation et application aux calculs des puissances

6. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. Par l'expression de $f(M)$ trouvée en question 2. on a

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) - 2M = 0_E \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3a+d & 2b+2c \\ 2b+2c & d-a \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+d & 2c-2b \\ 2b-2c & -a-3d \end{pmatrix} = O_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+d = 0 \\ 2c-2b = 0 \\ 2b-2c = 0 \\ -a-3d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+d = 0 \\ 2c-2b = 0 \\ 0 = 0 \\ -4d = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d = 0 \\ c = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = bV.
\end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(V)$. Or $U \neq O_2$. Donc (V) est libre et engendre $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Conclusion,

$$\boxed{(V) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E).}$$

7. De même, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ on a

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) - M = 0_E \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3a+d & 2b+2c \\ 2b+2c & d-a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d = 0 \\ 2c = 0 \\ 2b = 0 \\ -a-d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = -a \\ b = c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = aU.
\end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(U)$. Or $U \neq O_2$. Donc (U) est libre et engendre $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Conclusion,

$$\boxed{(U) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E).}$$

8. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Toujours par la question 2. on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(X) = X + U \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3a+d & 2b+2c \\ 2b+2c & d-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & 2c \\ 2b & -a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=2 \\ 2c=0 \\ 2b=0 \\ -a-d=-2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = 2-a \\ b=c=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On retrouve bien la structure affine garantie par la proposition III.5 du chapitre 20.

9. *Analyse.* Soient $\mathscr{B} = (e_1', e_2', e_3', e_4') \in E^4$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie

$$\begin{cases} f(e_1') = 0_E \\ f(e_2') = 2e_2' \\ f(e_3') = e_3' \\ f(e_4') = e_3' + e_4' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e_1' \in \operatorname{Ker}(f) \\ e_2' \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E) \\ e_3' \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \\ f(e_4') = e_3' + e_4' \end{cases}.$$

- Par la question 4. on peut prendre $e_1' = W$.
- Par la question 6. on peut prendre $e_2' = V$.
- Par la question 7. on peut également prendre $e_3' = U$.
- Dès lors, on observe que $f(e_4') = e_3' + e_4' \Leftrightarrow f(e_4') = e_4' + U \Leftrightarrow e_4' \in \mathcal{S}$. Donc par la question 8. avec $a = 1$, on peut prendre $e_4' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{pmatrix} = I_2$.

Synthèse. Soit $\mathscr{B} = (W, V, U, I_2)$. Alors $\mathscr{B}$ contient bien I_2. De plus,

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc

$$P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(P) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{array}
\end{aligned}$$

La matrice obtenue possède 4 pivots. Donc $\operatorname{rg}(P) = 4$. Cela correspond à la taille de la matrice. Donc $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de E. Enfin, par les questions 4. 6. 7. 8. on a

$$\begin{cases} f(W) = O_2 \\ f(V) = 2V \\ f(U) = U \\ f(I_2) = I_2 + U \end{cases}$$

Conclusion, en prenant $\boxed{\mathscr{B} = (W, V, U, I_2)}$, on obtient une base de E, contenant I_2, telle que

$$\boxed{T = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

10. Par la question précédente, on a

$$\boxed{P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

11. Posons $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(x)$ et $X' = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Alors,

$$X = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = PX' \iff X' = P^{-1}X.$$

Calculons P^{-1}. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{L_2+L_1}{2} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_3+L_4}{2} \end{matrix} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -(L_1 - L_2) \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien que $P \underset{\mathscr{L}}{=\sim} I_4$ et on obtient que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification :

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \text{ OK !}$$

Ainsi,

$$X' = P^{-1}X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Conclusion, les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ sont données par

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}.}$$

12. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $T = D + N$. De plus, $N^2 = O_4$ i.e. N est nilpotente d'ordre 2 et pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$. D'autre part, D est diagonale, donc par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observe également que

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N \text{ et } DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

Donc D et N commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N + O_2.$$

On a vu que $DN = N$. Par récurrence, $D^{n-1}N = N$. D'où

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On sait que $T = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Donc par la formule de changement de base

$$A = PTP^{-1}.$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Donc par ce qui précède,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^n & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n+2 & 0 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 2^n & n-1 \\ -n & 0 & 0 & -n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que le résultat fonctionne pour $n = 1$, on retrouve bien A et ça, c'est sympa. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n+2 & 0 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 2^n & n-1 \\ -n & 0 & 0 & -n+2 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Dans une autre base

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. On a

$$Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{B}_u\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors les opérations élémentaires suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow \tfrac{L_4 - L_3}{2} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array} \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Donc $Q \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_4$. Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérification :

$$QQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \text{ OK !}$$

Puisque Q est inversible, on en déduit que $\mathscr{B}_u$ est une base de E. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_u \text{ est une base de } E, \qquad Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{Q^{-1} = Q' = P_{\mathscr{B}_u,\mathscr{C}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

14. Bon, encore un peu de calcul, gardons courage. Soit $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(f)$. Par la formule de changement de base, on a
$$B = Q^{-1}AQ.$$
Donc
$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

15. Allez hop ! On n'est plus à ça près. On a
$$R = Q^{-1}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$
Puisque $Q^{-1} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, par stabilité par produit, on obtient que
$$\boxed{R \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}).}$$

16. On sait que $B = Q^{-1}AQ$ et que $A = PTP^{-1}$. Donc
$$B = Q^{-1}PTP^{-1}Q.$$
Or $R^{-1} = \left(Q^{-1}P\right)^{-1} = P^{-1}Q$. Conclusion,
$$\boxed{B = RTR^{-1}.}$$

Partie 4 : Application à la résolution d'un système d'équations différentielles

On cherche $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} f_1' = f_1 - f_2 \\ f_2' = 2f_2 + \frac{f_3}{2} \\ f_3' = f_3 \\ f_4' = -f_1 - f_2 - f_3. \end{cases}$$

On pose $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}$. Puisque les f_i sont dérivables, on dit que F est dérivable et on note $F' = \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \end{bmatrix} : t \mapsto \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \\ f_4'(t) \end{bmatrix}$. On pose enfin $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = R^{-1}F$.

17. Avec ces notations, on observe que

$$(\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad F' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} F.$$

Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad F' = BF.}$$

Puisque R^{-1} est à coefficients constants, on observe que $G' = R^{-1}F'$. Donc

$$G' = R^{-1}F' = R^{-1}BF.$$

Or $G = R^{-1}F \;\Leftrightarrow\; F = RG$. Donc

$$G' = R^{-1}BRG.$$

Or on a vu que $B = RTR^{-1}$ i.e. $R^{-1}BR = T$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad G' = TG.}$$

18. Par la question précédente et la définition de T,

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2g_2 \\ g_3 + g_4 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

Autrement dit on obtient

$$\begin{cases} g_1' = 0 \qquad (1) \\ g_2' = 2g_2 \qquad (2) \\ g_3' = g_3 + g_4 \qquad (3) \\ g_4' = g_4 \; (4) \end{cases}$$

Résolvons chacune de ces équations. On a

$$(1) \qquad g_1' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_1(t) = C_1.$$

Facile. Ensuite,

$$(2) \qquad g_2' - 2g_2 = 0.$$

La fonction $t \mapsto -2$ est continue donc admet des primitives dont l'une est donnée par $t \mapsto -2t$. Donc

$$(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_2(t) = C_2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Passons à (4) avant de revenir à (3). On a de même

$$(4) \qquad \Leftrightarrow \qquad g_4' - g_4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists C_4 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_4(t) = C_4\,\mathrm{e}^{t}.$$

Dès lors, (3) devient :

$$(3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_3'(x) - g_3(t) = g_4(t) = C_4\,\mathrm{e}^{t}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont données par $\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^t\big)$.
Soient y_p une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $y_0 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $\lambda : t \mapsto y_p(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ i.e. $y_p = \lambda\, y_0$. La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de (3)} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(t)y_0(t) + \underbrace{\lambda(t)y_0'(t) + \lambda_(t)y_0(t)}_{=0\text{car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = C_4\,\mathrm{e}^t \\
&\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(t)\,\mathrm{e}^t = C_4\,\mathrm{e}^t \\
&\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(t) = C_4 \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists C_3 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(t) = C_4 t + C_3 \\
&\Leftrightarrow \qquad \exists C_3 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_p(t) = (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t.
\end{aligned}$$

Donc

$$(3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists C_3 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_3(t) = (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t.$$

Puisque l'équation est à coefficients constants, on pouvait appliquer les recettes que l'on connaît pour les équations différentielles d'ordre 2 : l'équation caractéristique étant $r - 1 = 0$ i.e. $r = 1$. On obtient que le second membre $t \mapsto C_4\,\mathrm{e}^t$ présente la racine de l'équation caractéristique. Cette racine étant simple, on pouvait directement dans ce cas particulier chercher une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto (at+b)\,\mathrm{e}^t$. Conclusion,

$$\boxed{(\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\,(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad G(t) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t \\ C_4\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix}.}$$

19. Par les questions précédentes, $(\bigstar)$ est équivalente à l'existence $(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F(t) = RG(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t \\ C_4\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t - C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{2t} - C_4\,\mathrm{e}^t \\ 2C_4\,\mathrm{e}^t \\ C_1 - (C_4 t + C_3)\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists\,(C_1,C_2,C_3,C_4)\in\mathbb{R}^4,\ \forall t\in\mathbb{R},\qquad F(t)=\begin{bmatrix}(C_4t+C_3)\,\mathrm{e}^t-C_2\,\mathrm{e}^{2t}\\ C_2\,\mathrm{e}^{2t}-C_4\,\mathrm{e}^t\\ 2C_4\,\mathrm{e}^t\\ C_1-(C_4t+C_3)\,\mathrm{e}^t\end{bmatrix}.}$$

En particulier, si $F(0)=(4,1,2,-1)$, on a

$$\begin{bmatrix}C_3-C_2\\ C_2-C_4\\ 2C_4\\ C_1-C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_3-C_2=4\\ C_2-C_4=1\\ 2C_4=2\\ C_1-C_3=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_3-C_2=4\\ C_2-C_4=1\\ C_4=1\\ C_1-C_3=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_3-C_2=4\\ C_2=1+C_4=2\\ C_4=1\\ C_1-C_3=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_3=4+C_2=4+2=6\\ C_2=2\\ C_4=1\\ C_1-C_3=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}C_3=6\\ C_2=2\\ C_4=1\\ C_1=-1+C_3=-1+6=5.\end{cases}$$

Conclusion, dans ce cas,

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\qquad F(t)=\begin{bmatrix}(t+6)\,\mathrm{e}^t-2\,\mathrm{e}^{2t}\\ 2\,\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t\\ 2\,\mathrm{e}^t\\ 5-(t+6)\,\mathrm{e}^t\end{bmatrix}.}$$