Devoir Maison 11
Couples de variables aléatoires et géométrie

A faire pour le vendredi 17 juin

Exercice I - Probabilités

On lance à plusieurs reprise une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et face avec une probabilité $q = 1 - p \in]0;1[$. On supposes les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombres de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et n (y compris les lots de longueur 1). Par exemple, en notant F le fait d'obtenir face et P le fait d'obtenir pile, dans la série $FFPFPPFFPPP$. Alors pour un tel ω, on a $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$ puis $N_3(\omega) = 2$, $N_4(\omega) = 3$, $N_5(\omega) = N_6(\omega) = 4$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 5$ et enfin $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de $N_2 - 1$. En déduire l'espérance et la variance de N_2.
2. (a) Exprimer $(N_2 = 1, N_3 = 2)$ uniquement avec X_1, X_2, X_3 et les symboles $=$ et $\neq$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2)$.
3. Déterminer la loi conjointe de (N_2, N_3).
4. Déterminer la loi conditionnelle de N_3 sachant $N_2 = 1$.
5. Déterminer la loi marginale de N_3.
6. Les variables N_2 et N_3 sont-elles indépendantes ?
7. Préciser l'espérance et la variance de N_3.

Partie 2 : A l'ordre n

On suppose dans toute la suite que $p = q = \frac{1}{2}$ i.e. que la pièce est équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

8. Calculer $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.
9. Montrer que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,
$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0).$$
10. En déduire que
$$\forall k \in [\![1;n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).$$
11. Déterminer une relation de récurrence entre $G_{N_{n+1}}$ et G_{N_n}.
12. En déduire G_{N_n}.
13. Calculer $\mathbb{E}(N_n)$, $\mathbb{V}(N_n)$. Vérifier la cohérence avec la question 7.

14. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}$.

15. En déduire la loi de N_n.

16. Redémontrer alors la question 10.

17. Admirer la méthode pour obtenir la loi de N_n et réfléchir à une interprétation du résultat de la question 15.

Exercice II - Géométrie

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3x+y-z=b \end{cases}$$

1. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

2. Déterminer une équation paramétrique de chacune de ces droites. Préciser A respectivement A' un point de $\mathcal{D}$ respectivement $\mathcal{D}'$ ainsi que $\overrightarrow{u}$ respectivement $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ respectivement $\mathcal{D}'$.

3. A l'aide du déterminant, montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires si et seulement si $b = 2a-3$.

4. Retrouver le résultat de la question précédente directement à l'aide des équations cartésiennes et préciser dans ce cas I_a le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On suppose que $b = 2a-3$ et on note $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

5. Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

6. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

7. Déterminer des équations paramétriques puis cartésiennes de la droite Δ_a passant par I_a et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

8. Montrer que $\mathcal{Q} = \{ M \in \mathscr{E} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ M \in \Delta_a \} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \Delta_a$ est un plan dont on précisera les équations paramétriques et cartésiennes.

On suppose $a = 1$ et $b = -1$. On fixe $B\,(1/5, -7/5, 1/5)$.

9. Vérifier que $B \in \mathcal{D}'$.

10. Calculer $d\,(B, \mathcal{D})$.

11. Déterminer le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ puis retrouver le résultat précédent.

Exercice III - Géométrie

Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, $\mathcal{D}'$ la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{a}\,(1,1,1)$, $\mathcal{Q} : y + z = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1.$$

1. Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_m$.

2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M par lesquels passe un unique plan $\mathcal{P}_m$.

3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit $\mathcal{R}_m$ le plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. On fixe $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{R}_m$.
   (b) A l'aide du produit scalaire, en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$.
   (c) Préciser deux vecteurs directeurs de $\mathcal{R}_m$ et à l'aide du déterminant retrouver le résultat de la question précédente.

4. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathcal{D}''$ l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}$.

5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer I_m le point d'intersection de $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R et $\mathscr{C}$ le cercle inclus dans $\mathcal{Q}$ de centre $\Omega\,(1/2, 0, 0)$ de rayon $1/2$.

6. Déterminer les équations cartésiennes de $\mathscr{C}$.

7. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$.

8. Montrer que
$$(\forall m \in \mathbb{R}, \qquad I_m \in \mathcal{S}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_0 = 1/2 \\ z_0 = y_0 \\ y_0^2 = \frac{4R^2-1}{8} \end{cases}.$$

9. On suppose les conditions de la question précédente vérifiée. Déterminer et reconnaître $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$.

10. En déduire que les I_m sont tous inclus dans un cercle.