Correction du Devoir Maison 11 Couples de variables aléatoires et géométrie

Du vendredi 17 juin

Exercice I - Probabilités

On lance à plusieurs reprise une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et face avec une probabilité $q = 1-p \in]0;1[$. On supposes les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombres de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et n. Par exemple, en notant F le fait d'obtenir face et P le fait d'obtenir pile, dans la série $FFPPPPFFPPP$. Alors pour un tel ω, on a $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$ puis $N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et enfin $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. En deux lancers, il est possibles d'effectuer PP, PF, FP ou FF. On obtient pour N_2 dans chaque cas 1, 2, 2 et 1 respectivement. Donc l'univers image de $N_2(\Omega)$ est donné par $N_2(\Omega) = \{1;2\}$, en effet ou les deux lancers sont identiques et $N_2 = 1$ ou les deux lancers sont distincts et $N_2 = 2$. Dès lors, $(N_2 - 1)(\Omega) = \{0;1\}$. Nécessairement, on en déduit que $N_2 - 1$ est une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre :
$$\mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = \mathbb{P}(N_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2).$$
Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &\qquad \text{car les deux lancers sont indépendants}\\ &= p \times (1-p) + (1-p) \times p \qquad \text{car } X_1 \sim \mathscr{B}(p) \text{ et } X_2 \sim \mathscr{B}(p)\\ &= 2p(1-p).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{N_2 - 1 \sim \mathscr{B}(2p(1-p)).}$$
On a donc directement d'après le cours,
$$\mathbb{E}(N_2 - 1) = 2p(1-p)$$
et
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_2 - 1) &= 2p(1-p)(1 - 2p(1-p))\\ &= 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).\end{aligned}$$
Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(N_2) = \mathbb{E}(N_2 - 1) + 1 = 2p(1-p) + 1 = 1 + 2p - 2p^2.$$

Par propriété de la variance,

$$\mathbb{V}(N_2) = \mathbb{V}(N_2 - 1) = 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_2) = 1 + 2p - 2p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_2) = 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).}$$

2. (a) On observe que $(N_2 = 1)$ est l'évènement les deux premiers lancers sont identiques : $(X_1 = X_2)$. Dans ce cas, pour obtenir $(N_3 = 2)$, il faut ajouter un troisième lancer différent des deux premiers et donc

$$\boxed{(N_2 = 1, N_3 = 2) = (X_1 = X_2 \neq X_3).}$$

(b) Par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3).$$

Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_3 = 0) \\
&\qquad \text{car } X_1,\ X_2,\ X_3 \text{ sont indépendantes} \\
&= (1-p)(1-p)\,p + pp(1-p) \\
&= p(1-p)(1 - p + p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1-p).}$$

3. On note qu'en trois lancers, il est possible de faire

- trois lancers alternés : PFP ou FPF et donc $N_3 = 3$,
- deux lancers identiques et un troisième distincts : PPF, FFP, PFF, FPP et donc $N_3 = 2$
- ou enfin trois lancers identiques : PPP ou FFF et donc $N_3 = 1$.

D'où

$$N_3(\Omega) = [\![1;3]\!].$$

Dès lors, l'univers image du couple (N_2, N_3) est inclus dans $[\![1;2]\!] \times [\![1;3]\!]$. On procède de la même façon que dans la question précédente, on observe que $(N_2 = 1, N_3 = 1) = (X_1 = X_2 = X_3)$. Donc, toujours par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\,\mathbb{P}(X_3 = 1) \\
&\qquad \text{par indépendance.} \\
&= (1-p)^3 + p^3 \\
&= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 + p^3 \\
&= 1 - 3p + 3p^2.
\end{aligned}$$

On observe qu'il est impossible d'avoir moins de séries à l'étape 3 qu'à l'étape 2. Donc

$$\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 1) = 0.$$

Par la question précédente, $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1-p)$.
L'évènement $(N_2 = 2, N_3 = 2) = (X_1 \neq X_2 = X_3)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 0)\\ &\qquad \text{par indépendance}\\ &= (1-p)p^2 + p(1-p)^2\\ &= (1-p)p(p+1-p)\\ &= (1-p)p.\end{aligned}$$

Egalement,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) = 0.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 3) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_3)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)\\ &= (1-p)p(1-p) + p(1-p)p\\ &= (1-p)p(1-p+p)\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient le tableau suivant :

$N_2 = i \backslash N_3 = j$	1	2	3
1	$1-3p+3p^2$	$p(1-p)$	0
2	0	$p(1-p)$	$p(1-p)$

NB : on vérifie que $1-3p+3p^2+3p(1-p) = 1-3p+3p^2+3p-3p^2 = 1$ *OK !*

4. Par la question 1.

$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(N_2 - 1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = 1 - 2p(1-p) = 1 - 2p + 2p^2 = (1-p)^2 + p^2 > 0.$

Donc $\mathbb{P}(N_2 = 1) \neq 0$ et par définition, pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(N_3 = i \mid N_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{1-2p+2p^2}.$$

Par la deuxième ligne du tableau de la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_3 = 1 \mid N_2 = 1) &= \frac{1-3p+3p^2}{1-2p+2p^2},\\ \mathbb{P}(N_3 = 2 \mid N_2 = 1) &= \frac{p(1-p)}{1-2p+2p^2},\\ \mathbb{P}(N_3 = 2 \mid N_2 = 1) &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion, la loi conditionnelle de N_3 sachant $(N_2 = 1)$ est donnée par

j	1	2	3
$\mathbb{P}\left(N_3 = j \mid N_2 = 1\right)$	$\frac{1-3p+3p^2}{1-2p+2p^2}$	$\frac{p(1-p)}{1-2p+2p^2}$	0

5. Soit $i \in [\![1;3]\!]$. On sait que $\left(\left(N_2 = 1\right), \left(N_2 = 2\right)\right)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\left(N_3 = i\right) = \mathbb{P}\left(N_3 = i, N_2 = 1\right) + \mathbb{P}\left(N_3 = i, N_2 = j\right).$$

Donc d'après la loi conjointe donnée par le tableau de la question 3. on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_3 = 1\right) &= 1 - 3p + 3p^2 + 0 = 1 - 3p + 3p^2 \\
\mathbb{P}\left(N_3 = 2\right) &= p\left(1-p\right) + p\left(1-p\right) = 2p\left(1-p\right) \\
\mathbb{P}\left(N_3 = 3\right) &= 0 + p\left(1-p\right) = p\left(1-p\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, la loi marginale de N_3 est donnée par

i	1	2	3
$\mathbb{P}\left(N_3 = i\right)$	$1 - 3p + 3p^2$	$2p\left(1-p\right)$	$p\left(1-p\right)$

6. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}\left(N_2 = 1, N_3 = 3\right) = 0$$

mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_2 = 1\right)\mathbb{P}\left(N_3 = 3\right) &= \left(1 - 2p\left(1-p\right)\right)p\left(1-p\right) \\
&= \left(1 - 2p + 2p^2\right)p\left(1-p\right) \\
&= \left(\left(1-p\right)^2 + p^2\right)p\left(1-p\right) > 0 \qquad \text{car } p \in \left]0;1\right[.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}\left(N_2 = 1, N_3 = 3\right) \neq \mathbb{P}\left(N_2 = 1\right)\mathbb{P}\left(N_3 = 3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables } N_2 \text{ et } N_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

7. Par définition,

$$\mathbb{E}\left(N_3\right) = \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}\left(N_3 = k\right).$$

Donc par la question 5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(N_3\right) &= 1 \times \left(1 - 3p + 3p^2\right) + 2 \times 2p\left(1-p\right) + 3 \times p\left(1-p\right) \\
&= 1 - 3p + 3p^2 + 7p\left(1-p\right) \\
&= 1 + 4p - 4p^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème de transfert puis la question 5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(N_3^2\right) = \sum_{k=1}^{3} k^2\mathbb{P}\left(N_3 = k\right) &= 1^2 \times \left(1 - 3p + 3p^2\right) + 2^2 \times 2p\left(1-p\right) + 3^2 \times p\left(1-p\right) \\
&= 1 - 3p + 3p^2 + 17p\left(1-p\right) \\
&= 1 + 14p - 14p^2.
\end{aligned}$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_3) = \mathbb{E}\left(N_3^2\right) - \mathbb{E}(N_3)^2 &= 1 + 14p - 14p^2 - \left(1 + 4p - 4p^2\right)^2 \\ &= 1 + 14p - 14p^2 - 1 - 16p^2 - 16p^4 - 8p + 8p^2 + 32p^3 \\ &= 6p - 22p^2 + 32p^3 - 16p^4 \\ &= 2p\left(3 - 11p + 16p^2 - 8p^3\right) \\ &= 2p(1-p)\left(3 - 8p + 8p^2\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_3) = 1 + 4p - 4p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_3) = 2p(1-p)\left(3 - 8p + 8p^2\right).}$$

Partie 2 : A l'ordre n

On suppose dans toute la suite que $p = q = \frac{1}{2}$ i.e. que la pièce est équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

8. On note que $(N_n = 1)$ équivaut à avoir obtenu toujours le même résultat au cours des n lancers :

$$\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n).$$

Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n, X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\ldots\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\ldots\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\qquad\qquad \text{par indépendance} \\ &= (1-p)^n + p^n \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{car } p = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Au contraire, $(N_n = n)$ équivaut à avoir eu des lancers alternés à chaque fois :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n, X_1 = 1).\end{aligned}$$

Supposons n pair,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\ldots\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\ldots\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &\qquad\qquad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

De la même façon, si n est impair, $\mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

9. Soit $k \in [\![2;n]\!]$. Puisque $((X_n = 0), (X_n = 1))$ forme un système complet, on a par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

On note que si $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0)$ est réalisé alors, les lancers n et $n+1$ sont distincts et donc $N_{n+1} = N_n + 1$ i.e. $N_n = N_{n+1} - 1$. Dès lors,

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) = (N_n = k-1, X_{n+1} = 1, X_n = 0).$$

Au contraire, si $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1)$ est réalisé, alors les lancers n et $n+1$ sont identiques, donc $N_{n+1} = N_n$ et ainsi

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1) = (N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

Par suite,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_n = k-1, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

De plus, on note que N_n dépend entièrement de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et X_{n+1} est indépendante de ces variables aléatoires. Par conséquent, X_{n+1} et N_n sont indépendantes. Mieux, X_{n+1} est indépendante du couple (N_n, X_n). Donc

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1).$$

Or $X_{n+1} \sim \mathscr{B}(p) = \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'où,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0).}$$

10. Soit $k \in [\![2;n]\!]$, de même que dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(N_n = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k-1, X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\,\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\,\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 1).
\end{aligned}$$

Puisque $((X_{n+1} = 0), (X_{n+1} = 1))$ forme un système complet d'évènements, par le formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1).$$

Donc par ce qui précède et la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 1) \\
&\quad \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 1) + \mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1),
\end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales car $((X_n = 0), (X_n = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$\forall k \in [\![2; n]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).$$

De plus, si $k = 1$, alors par la question 9. $\mathbb{P}(N_{n+1} = 1) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbb{P}(N_n = 1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$. Donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + 0 = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

De même, si $k = n+1$, $\mathbb{P}(N_{n+1} = n+1) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$ et $\mathbb{P}(N_n = 0) = n+1-1 = \mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).}$$

11. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$G_{N_{n+1}}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_{N_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} t^k \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k) + 0 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1) + 0 \\
&= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1).
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k-1$ dans la seconde somme. Alors,

$$\begin{aligned}
G_{N_{n+1}}(t) &= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t^{k+1} \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{t}{2}G_{N_n}(t).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_{n+1}}(t) = \frac{1+t}{2}G_{N_n}(t).}$$

12. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, on observe que la suite de réels $(G_{N_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+t}{2}$. Donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} G_{N_2}(t).$$

Or par la question 1. $\mathbb{P}(N_2=2) = 2p(1-p) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et donc $\mathbb{P}(N_2=1) = 1 - \mathbb{P}(N_2=1) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$G_{N_2}(t) = t\mathbb{P}(N_2=1) + t^2\mathbb{P}(N_2=2) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} = \frac{t(1+t)}{2}.$$

Ainsi,

$$G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{t(1+t)}{2} = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On sait que $\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1)$. Or par la question précédente, G_{N_n} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G'_{N_n}(t) &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} + t(n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+t}{2} + \frac{(n-1)t}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\frac{1+nt}{2}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2}\frac{1+n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

De plus, on a également,

$$\mathbb{V}(N_n) = G''_{N_n}(1) + G'_{N_n}(1) - G'_{N_n}(1)^2.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}G''_{N_n}(t) &= (n-2)\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{1+nt}{2} + \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\frac{n}{2}\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{(n-2)(1+nt)}{4} + \frac{1+t}{2}\frac{n}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{n-2+n(n-2)t+n+nt}{4}\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{2n-2+n(n-1)t}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_n) &= \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-3}\frac{2n-2+n(n-1)}{4} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\ &= \frac{n^2+n-2}{4} + \frac{2n+2}{4} - \frac{n^2+2n+1}{4}\\ &= \frac{n-1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_n) = \frac{n-1}{4}.}$$

En particulier si $n = 3$, on obtient

$$\mathbb{E}(N_3) = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or par la question 7. avec $p = 1/2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_3) &= 1 + 4p - 4p^2 = 1 + 2 - 1 = 2\\ \mathbb{V}(N_3) &= 2p(1-p)\left(3 - 8p + 8p^2\right) = \frac{1}{2}(3 - 4 + 2) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les résultats obtenus sont en accord avec la question 7.}}$$

14. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $t \in \mathbb{R}$. Par la question 12. on a

$$G_{N_n}(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}G_{N_n}(t) &= \frac{t}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k 1^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{t^{k+1}}{2^{n-1}}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = k+1\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}.}$$

15. Soit $n \geqslant 2$. Par la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Posons $P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} X^k \mathbb{P}(N_n = k)$. On observe que P et Q coïncident sur $\mathbb{R}$. Donc $P - Q$ admet une infinité de racines et donc $P - Q = 0$ i.e. $P = Q$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} X^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on conclut que

$$\boxed{N_n(\Omega) = [\![1;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

16. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Avec la convention $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{-1} = 0$, on a par la question précédente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-2}\frac{1}{2^{n-1}}\\ &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2}\right).\end{aligned}$$

Par la formule de Pascal,

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(N_n = k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(N_n = k-1\right) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k-1}.$$

Or par la question précédente, on a $\mathbb{P}\left(N_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k-1}$. Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n+1]\!], \qquad \mathbb{P}\left(N_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(N_n = k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(N_n = k-1\right).}$$

17. La variable aléatoire N_n compte finalement le nombre de fois où la pièce a changé de face. **Dans le cas d'une pièce équilibrée,** et uniquement dans ce cas là, la probabilité de changer de face ne dépend pas de la face obtenue précédemment. Autrement dit, en notant ξ_k, pour $k \in [\![2; n]\!]$, la variable aléatoire retournant 1 si l'on change de face ($X_k = X_{k-1}$) et 0 sinon, on obtient des variables ξ_k de même loi de Bernoulli, $\xi_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et de plus indépendantes ! Ainsi $\xi_2 + \cdots + \xi_n \sim \mathscr{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$. Or on observe que $N_n = 1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Donc $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$ et on retrouve bien dans ce raisonnement que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_n = k\right) &= \mathbb{P}\left(1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_2 + \cdots + \xi_n = k-1\right) \\
&= \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2^{n-1-(k-1)}} \\
&= \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice II - Géométrie

Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on considère les droites

$$\mathcal{D}:\begin{cases}x+y+z=1\\2x-y+z=a\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\mathcal{D}':\begin{cases}x-y+2z=2\\3x+y-z=b\end{cases}$$

1. Par ses équations cartésiennes, on observe que $\overrightarrow{n_1}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{n_2}(2,-1,1)$ sont deux vecteurs orthogonaux à $\mathcal{D}$. Donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donné par

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

De même, $\overrightarrow{n'_1}(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{n'_2}(3,1,-1)$ sont deux vecteurs orthogonaux à $\mathcal{D}'$ et donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est donné par

$$\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{n'_1}\wedge\overrightarrow{n'_2}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\7\\4\end{bmatrix}.$$

On observe que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\text{les droites } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

2. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{D}\quad&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y+z=1\\2x-y+z=a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y+z=1\\-3y-z=a-2\end{cases}\qquad L_2\leftarrow L_2-2L_1\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=1-y-z=1-y-2+a+3y=-1+a+2y\\z=2-a-3y\end{cases}\\&\Leftrightarrow\quad M=\begin{bmatrix}a-1\\0\\2-a\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On observe que

$$\boxed{A(a-1,0,2-a)\text{ est un point de }\mathcal{D}\text{ et }\vec{u}(2,1,-3)\text{ est bien un vecteur directeur de }\mathcal{D}.}$$

De plus, des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D}:\quad\begin{cases}x=a-1+2t\\y=t\\z=2-a-3t\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}.}$$

De même pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D}' \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 4x + z = b + 2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x + 2z - 2 = x + 2b + 4 - 8x - 2 = 2b + 2 - 7x \\ z = b + 2 - 4x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 2b+2 \\ b+2 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On observe que

$$\boxed{A'(0, 2b+2, b+2) \text{ est un point de } \mathcal{D}' \text{ et } \overrightarrow{u'}(-1,7,4) \text{ est bien un vecteur directeur de } \mathcal{D}'.}$$

De plus, des équations paramétriques de $\mathcal{D}'$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D}' : \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 2b + 2 + 7t \\ z = b + 2 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.}$$

3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont coplanaires i.e. la famille $\left(\vec{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}\right)$ est liée. Grâce au déterminant on obtient

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}\right) = 0.$$

Or

$$\overrightarrow{AA'} \begin{bmatrix} 0 - (a-1) \\ 2b + 2 - 0 \\ b + 2 - (2-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a \\ 2b+2 \\ b+a \end{bmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont coplanaires} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1-a \\ 1 & 7 & 2b+2 \\ -3 & 4 & a+b \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 2b+2+7-7a \\ 5 & 4 & a+b+4-4a \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 \\ C_3 \leftarrow C_2 + (1-a)\,C_2 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2b - 7a + 9 \\ 1 & 4 & b - 3a + 4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2b - 7a + 9 \\ 1 & b - 3a + 4 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad 5\,(3b - 9a + 12 - 2b + 7a - 9) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad b - 2a + 3 = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a - 3.}$$

4. Puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles d'après la question 1., on en déduit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. Par les équations cartésiennes, on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=a \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3x+y-z=b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=a \\ x-y+2z=2 \\ 3x+y-z=b \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=a-2 \\ -2y+z=1 \\ -2y-4z=b-3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=a-2 \\ -2y+z=1 \\ y+2z=\frac{3-b}{2} \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow -\tfrac{1}{2}L_4 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+2z=\frac{3-b}{2} \\ -2y+z=1 \\ -3y-z=a-2 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_4 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+2z=\frac{3-b}{2} \\ 5z=4-b \\ 5z=\frac{2a-4+9-3b}{2}=\frac{2a-3b+5}{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+2z=\frac{3-b}{2} \\ 5z=4-b \\ 0=\frac{2a-3b+5-8+2b}{2}=\frac{2a-b-3}{2} \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4-L_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1-y-z=1+\frac{b+1}{10}+\frac{b-4}{5}=\frac{3b+3}{10} \\ y=\frac{3-b}{2}-2z=\frac{3-b}{2}-\frac{8-2b}{5}=-\frac{b+1}{10} \\ z=\frac{4-b}{5} \\ 2a-b-3=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on observe que les droites sont coplanaires si et seulement si leur intersection est non vide si et seulement si le système est compatible i.e. admet une solution si et seulement si $b=2a-3$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} x=\frac{3b+3}{10}=\frac{6a-9+3}{10}=\frac{3a-3}{5} \\ y=-\frac{b+1}{10}=-\frac{2a-3+1}{10}=\frac{a-1}{5} \\ z=\frac{4-2a+3}{5}=\frac{7-2a}{5}. \end{cases}$$

Conclusion, on retrouve l'équivalence

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ coplanaires si et seulement si } b=2a-3.}$$

Dans ce cas l'intersection est réduit à un unique point donné par

$$\boxed{I_a\left(\frac{3a-3}{5},\frac{a-1}{5},\frac{7-2a}{5}\right).}$$

On suppose que $b=2a-3$ et on note $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

5. On sait que $A\,(a-1,0,2-a)\in\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}$ est un point de $\mathcal{P}$. De plus $\vec{u}\,(2,1,-3)$ est un vecteur de $\mathcal{D}$ donc de $\mathcal{P}$, $\vec{u'}\,(-1,7,4)$ est un vecteur de $\mathcal{D}'$ donc de $\mathcal{P}$. Ces deux vecteurs sont, comme observé à la question 1. non colinéaires. Donc on obtient directement que pour $M\,(x,y,z)\in\mathscr{E}$,

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad M\in A+\mathrm{Vect}\left(\vec{u},\vec{u'}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s)\in\mathbb{R}^2,\qquad M=A+t\vec{u}+s\vec{u'}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s)\in\mathbb{R}^2,\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1\\0\\2-a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\7\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, des équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{P}:\quad \begin{cases}x=a-1+2t-s\\ y=t+7s\\ z=2-1-3t+4s\end{cases},\qquad (t,s)\in\mathbb{R}^2.}$$

6. Puisque $A\,(a-1,0,2-a)\in\mathcal{P}$, $\vec{u}\,(2,1,-3)$ et $\vec{u'}\,(-1,7,4)$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$. Pour $M\,(x,y,z)\in\mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{u'}\right)\text{ sont liés}\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{u'}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x-a+1 & 2 & -1\\ y & 1 & 7\\ z-2+a & -3 & 4\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ y+7x-7a+7 & 15 & 7\\ z-2+a+4x-4a+4 & 5 & 4\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{matrix}C_1\leftarrow C_1+(x-a+1)\,C_3\\ C_2\leftarrow C_2+2C_3\end{matrix}\\
&\Leftrightarrow \quad 5\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 7x+y-7a+7 & 3 & 7\\ 4x+z-3a+2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \quad 5\,(-1)\begin{vmatrix}7x+y-7a+7 & 3\\ 4x+z-3a+2 & 1\end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1\\
&\Leftrightarrow \quad -5\,(7x+y-7a+7-12x-3z+9a-6)=0\\
&\Leftrightarrow \quad -5x+y-3z+2a+1=0\\
&\Leftrightarrow \quad 5x-y+3z=2a+1.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{5x-y+3z=2a+1.}$$

NB : on vérifie notre résultat, puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires, on a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$ normal à $\mathcal{P}$. Or

$$\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -5 \\ 15 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond bien au vecteur normal retourné par l'équation cartésienne.

7. Par la question précédente, $\overrightarrow{n}(5,-1,3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc un vecteur directeur de Δ_a. De plus, $I_a\left(\frac{3a-3}{5}, \frac{a-1}{5}, \frac{7-2a}{5}\right)$ est un point de Δ_a. Donc des équations paramétriques de Δ_a est donnée par

$$\boxed{\Delta_a : \qquad \begin{cases} x = \frac{3a-3}{5} + 5t \\ y = \frac{a-1}{5} - t \\ z = \frac{7-2a}{5} + 3t \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Donc pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned} M \in \Delta_a \qquad & \Leftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x = \frac{3a-3}{5} + 5t \\ y = \frac{a-1}{5} - t \\ z = \frac{7-2a}{5} + 3t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x = \frac{3a-3}{5} + 5\left(\frac{a-1}{5} - y\right) = \frac{8a-8}{5} - 5y \\ t = \frac{a-1}{5} - y \\ z = \frac{7-2a}{5} + 3\left(\frac{a-1}{5} - y\right) = \frac{4+a}{5} - 3y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x + 5y = \frac{8(a-1)}{5} \\ 3y + z = \frac{4+a}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, des équations cartésiennes de Δ_a sont données par

$$\boxed{\Delta_a : \qquad \begin{cases} x + 5y = \frac{8(a-1)}{5} \\ 3y + z = \frac{4+a}{5}. \end{cases}}$$

8. Par les équations paramétriques de Δ_a, on a pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{Q} \qquad & \Leftrightarrow \qquad \exists a \in \mathbb{R}, \qquad M \in \Delta_a \\ & \Leftrightarrow \qquad \exists a \in \mathbb{R},, \ \exists t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x = \frac{3a-3}{5} + 5t \\ y = \frac{a-1}{5} - t \\ z = \frac{7-2a}{5} + 3t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \qquad \exists \left(a', t\right) \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x = \frac{-3}{5} + 3a' + 5t \\ y = \frac{-1}{5} + a' - t \\ z = \frac{7}{5} - 2a' + 3t \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $B(-3/5, -1/5, 7/5)$, $\overrightarrow{n}(5,-1,3)$ et $\overrightarrow{n'}(3,1,-2)$. Alors,

$$M \in \mathcal{Q} \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in B + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right).$$

Conclusion, $\mathcal{Q}$ est bien un plan, dont des équations paramétriques sont données par

$$\boxed{\mathcal{Q} : \qquad \begin{cases} x = \frac{-3}{5} + 3t + 5s \\ y = \frac{-1}{5} + t - s \\ z = \frac{7}{5} - 2t + 3s \end{cases} \quad , \qquad (t,s) \in \mathbb{R}^2.}$$

De là, pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$, on en déduit également que

$$\begin{array}{llll}
M \in \mathcal{Q} & \Leftrightarrow & \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} x = \frac{-3}{5} + 3t + 5s \\ y = \frac{-1}{5} + t - s \\ z = \frac{7}{5} - 2t + 3s \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} 3t + 5s = \frac{-3}{5} - x \\ t - s = \frac{-1}{5} - y \\ -2t + 3s = \frac{7}{5} - z \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} t - s = \frac{-1}{5} - y \\ 3t + 5s = \frac{-3}{5} - x \\ -2t + 3s = \frac{7}{5} - z \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 & \Leftrightarrow & \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} t - s = \frac{-1}{5} - y \\ 8s = -x + 3y \\ s = 1 - 2y - z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} t = \frac{-1}{5} - y + s \\ 0 = -x + 19y + 8z - 8 \\ s = 1 - 2y - z \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 8L_3 \\
 & \Leftrightarrow & -x + 19y + 8z = 8. &
\end{array}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{Q} : \qquad -x + 19y + 8z = 8.}$$

On suppose $a = 1$ et $b = -1$. On fixe $B(1/5, -7/5, 1/5)$.

9. Dans ce cas, les équations cartésiennes de $\mathcal{D}'$ sont données par

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$$

Donc pour $(x,y,z) = (1/5, -7/5, 1/5)$, on a

$$\begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ OK.} \\ \frac{3}{5} - \frac{7}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{5}{5} = -1 \text{ OK.} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{B \in \mathcal{D}'.}$$

10. Puisque $A(a-1, 0, 2-a) = (0,0,1) \in \mathcal{D}$ et que $\vec{u}(2,1,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, par la

formule de la distance d'un point à une droite dans l'espace, on a

$$\begin{aligned}
d(B,\mathcal{D}) &= \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} \\
&= \frac{\left\|\begin{bmatrix}1/5\\-7/5\\-4/5\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{4+1+9}} \qquad = \frac{\left\|\begin{bmatrix}25/5\\-5/5\\15/5\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{\left\|\begin{bmatrix}5\\-1\\3\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{\sqrt{25+1+9}}{\sqrt{14}} \\
&= \sqrt{\frac{35}{14}}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(B,\mathcal{D}) = \sqrt{\frac{5}{2}}.}$$

11. Soit H le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}
H &= A + \frac{\left\langle\overrightarrow{AB},\vec{u}\right\rangle\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{\left\langle\begin{bmatrix}1/5\\-7/5\\-4/5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\rangle}{4+1+9}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{5}\frac{2-7+12}{14}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{5}\frac{7}{14}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2\\1\\7\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, le projeté de B sur $\mathcal{D}$ est donné par

$$\boxed{H(2/10, 1/10, 7/10).}$$

De là, on en déduit que

$$\begin{aligned}
d(B,\mathcal{D}) = BH &= \|(1/5-1/5, 1/10+7/5, 7/10-1/5)\| \\
&= \|(0, 15/10, 5/10)\| \\
&= \|(0, 3/2, 1/2)\| \\
&= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{d\left(B,\mathcal{D}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}.}$$

Exercice III - Géométrie

Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, $\mathcal{D}'$ la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{a}\,(1,1,1)$, $\mathcal{Q} : y + z = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1.$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M\,(x,y,z) \in \mathcal{D}$. Alors, on a $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$. Par suite,

$$x + my - mz = 1 + mz - mz = 1.$$

Donc $M \in \mathcal{P}_m$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{D}$, on conclut que

$$\boxed{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_m.}$$

2. On fixe $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. Pour $m \in \mathbb{R}$, on a

$$M \in \mathcal{P}_m \quad \Leftrightarrow \quad x + my - mz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m\,(y - z) = 1 - x.$$

Si $y = z$, et $1 - x \neq 0$ l'équation n'admet aucune solution. Si $y = z$ et $1 - x = 0$, l'équation admet une infinité de solutions $m \in \mathbb{R}$ (or on n'en cherche qu'une seule). Enfin, si $y \neq z$, alors

$$m = \frac{1-x}{y-z}.$$

Donc l'équation admet une unique solution en m si et seulement si $y \neq z$. Ainsi,

$$\mathscr{F} = \{\, M\,(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid y \neq z \,\} = \mathscr{E} \setminus \{\, M\,(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid y = z \,\} = \mathscr{E} \setminus \{\, M\,(x,y,y) \in \mathscr{E} \mid y \in \mathbb{R} \,\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{E} \setminus \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit $\mathcal{R}_m$ le plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. On fixe $m \in \mathbb{R}$.

(a) Par l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_m$, on en déduit que $\overrightarrow{n_m}\,(1, m, -m)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$. Or $\mathcal{R}_m$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Donc $\overrightarrow{n_m}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{R}_m$. De plus, $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{R}_m$. Donc $\vec{a}\,(1,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{R}_m$. On observe que $\vec{a}$ n'est jamais colinéaire à $\overrightarrow{n_m}$. Donc $\overrightarrow{n'_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \vec{a}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}_m$:

$$\overrightarrow{n'_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m \\ -m-1 \\ 1-m \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\overrightarrow{n'_m}\,(2m, -m-1, 1-m) \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{R}_m.}$$

(b) Soit $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. Puisque $O \in \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{R}_m$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{R}_m \quad & \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n'_m} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 2m \\ -m-1 \\ 1-m \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2mx - (m+1)\,y + (1-m)\,z = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{R}_m : \qquad 2mx - (m+1)\,y + (1-m)\,z = 0.}$$

(c) On a vu précédemment que $\overrightarrow{n_m}(1, m, -m)$ et $\vec{a}(1,1,1)$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{R}_m$ et $O \in \mathcal{R}_m$. Dès lors pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{R}_m \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n_m}, \vec{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & m & 1 \\ z & -m & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y-x & m-1 & 1 \\ z-x & -m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - xC_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad -\begin{vmatrix} y-x & m-1 \\ z-x & -m-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{en développant par rapport à } C_3 \\
&\Leftrightarrow \quad -\left[(y-x)(-m-1) - (m-1)(z-x)\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (m+1+m-1)\,x - (m+1)\,y - (m-1)\,z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2mx - (m+1)\,y - (m-1)\,z = 0.
\end{aligned}$$

Ô miracle ! On retrouve le résultat de la question précédente et une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$:

$$\boxed{\mathcal{R}_m : \quad 2mx - (m+1)\,y + (1-m)\,z = 0.}$$

4. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \mathcal{D}'' = \mathcal{P}_m \cap \mathcal{Q} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + my - mz = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - my + mz = 1 + mz + mz = 1 + 2mz \\ y = -z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2m \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}'' \text{ est la droite passant par } A(1,0,0) \text{ et de vecteur directeur } \overrightarrow{b_m}(2m,-1,1).}$$

5. Soit $I_m(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$I_m \in \mathcal{P}_m \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_m \quad \Leftrightarrow \quad I_m \in \mathcal{D}'' \cap \mathcal{R}_m$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
I_m \in \mathcal{P}_m \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_m \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2mz \\ y = -z \end{cases} \text{ et } 2mx - (m+1)\,y + (1-m)\,z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2mz \\ y = -z \\ 2m + 4m^2 z + (m+1)\,z + (1-m)\,z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2mz \\ y = -z \\ \left(4m^2 + 2\right) z = -2m \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - 2m\frac{m}{2m^2+1} = \frac{1}{2m^2+1} \\ y = \frac{m}{2m^2+1} \\ z = -\frac{m}{2m^2+1} \end{cases} \qquad \text{car } 2m^2 + 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$ est donné par

$$\boxed{I_m\left(\frac{1}{2m^2+1}, \frac{m}{2m^2+1}, -\frac{m}{2m^2+1}\right).}$$

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R et $\mathscr{C}$ le cercle inclus dans $\mathcal{Q}$ de centre $\Omega\,(1/2, 0, 0)$ de rayon $1/2$.

6. Soit $M\,(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega\, M = \frac{1}{2} \\ M \in \mathcal{Q} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{1}{4} \\ y = -z. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, des équations cartésiennes de $\mathscr{C}$ sont données par

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{1}{4} \\ y = -z. \end{cases}}$$

7. Par la question précédente, pour $M\,(x, y, z) \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2x-1)^2 + \left(2\sqrt{2}y\right)^2 = 1 \\ y = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0; 2\pi[\,, \quad \begin{cases} 2x - 1 = \cos(\theta) \\ 2\sqrt{2}y = \sin(\theta) \\ y = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0; 2\pi[\,, \quad \begin{cases} x = \frac{1+\cos(\theta)}{2} \\ y = \frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, des équations paramétriques de $\mathscr{C}$ sont données par

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad \begin{cases} x = \frac{1+\cos(\theta)}{2} \\ y = \frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{2}} \\ y = -z = -\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{2}} \end{cases}, \qquad \theta \in [0; 2\pi[\,.}$$

8. Commençons par donner des équations cartésiennes de $\mathcal{S}$. On a

$$\mathcal{S}: \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a $I_m\left(\frac{1}{2m^2+1}, \frac{m}{2m^2+1}, -\frac{m}{2m^2+1}\right)$. Ainsi, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& (\forall m \in \mathbb{R},\ I_m \in \mathcal{S}) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ \left(\frac{1}{2m^2+1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{m}{2m^2+1} - y_0\right)^2 + \left(-\frac{m}{2m^2+1} - z_0\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ \left(\frac{1}{2m^2+1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{m}{2m^2+1} - y_0\right)^2 + \left(-\frac{m}{2m^2+1} - z_0\right)^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ \frac{1}{(2m^2+1)^2} - \frac{2}{2m^2+1}x_0 + x_0^2 \\
& \qquad + \frac{m^2}{(2m^2+1)^2} - \frac{2m}{2m^2+1}y_0 + y_0^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{m^2}{(2m^2+1)^2} + \frac{2m}{2m^2+1}z_0 + z_0^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ \frac{2m^2+1}{(2m^2+1)^2} - \frac{2}{2m^2+1}(x_0 + my_0 - mz_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2m^2+1} - \frac{2}{2m^2+1}(x_0 + my_0 - mz_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ 1 - 2(x_0 + my_0 - mz_0) + (2m^2+1)\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ 1 - 2(x_0 + my_0 - mz_0) + (2m^2+1)\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{R},\ 2\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2\right)m^2 - 2m(y_0 - z_0) + 1 - 2x_0 + \left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Or, si la fonction polynomiale s'annule sur $\mathbb{R}$ tout entier, alors le polynôme associé possède une infinité de racines et donc par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$\begin{aligned}
(\forall m \in \mathbb{R},\ I_m \in \mathcal{S}) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0 \\ y_0 - z_0 = 0 \\ 1 - 2x_0 + 0 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \\ y_0 = z_0 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{4} + y_0^2 + y_0^2 = R^2 \\ y_0 = z_0 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_0^2 = \frac{4R^2-1}{8} \\ y_0 = z_0 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien

$$\boxed{(\forall m \in \mathbb{R}, \qquad I_m \in \mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 1/2 \\ z_0 = y_0 \\ y_0^2 = \frac{4R^2-1}{8} \end{cases}.}$$

9. On suppose les conditions de la question précédente vérifiée. Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a

$$M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Donc par les conditions précédentes,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-y_0)^2 + (z-y_0)^2 = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-y_0)^2 + (-y-y_0)^2 = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 + 2y_0^2 = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 + 2\frac{4R^2-1}{8} = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 + R^2 - \frac{1}{4} = R^2 \\ y = -z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{1}{4} \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

On retrouve les équations obtenues à la question 6. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S} \cap \mathcal{Q} = \mathscr{C}.}$$

10. D'après la question 8. sous les hypothèses, $\begin{cases} x_0 = 1/2 \\ y_0 = z_0 \\ y_0^2 = \frac{4R^2-1}{8} \end{cases}$, on obtient que tous les I_m sont inclus dans la sphère $\mathcal{S}$. De plus, par définition, les I_m sont les points d'intersection de $\mathcal{P}_m$ (qui varie en fonction de m) de $\mathcal{R}_m$ (qui varie aussi) mais aussi de $\mathcal{Q}$, indépendant de m. Donc tous les I_m sont inclus dans $\mathcal{Q}$. Ainsi,

$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad I_m \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}.$$

Donc par la question précédente, tous les I_m appartiennent au même cercle $\mathscr{C}$ qui est indépendant de m :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R}, \qquad I_m \in \mathscr{C}.}$$

Notez que l'on n'a pas démontré que chaque point de $\mathscr{C}$ est forcément égal à un I_m.