Corrigé du Devoir Maison 1
Logique & Fonctions réelles

Exercice I - Logique

Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que f et g commutent si et seulement si $f \circ g = g \circ f$. On s'intéresse à déterminer le centre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ i.e. l'ensemble

$$\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f \}.$$

1. Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. On a

$$\boxed{P(f,g)\ :\qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) \text{ ».}}$$

La négation est donc

$$\boxed{\overline{P(f,g)}\ :\qquad \text{« } \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x) \text{ ».}}$$

2. Les assertions s'écrivent :

   (a) $\boxed{A : \text{« } \forall (f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\quad P(f,g)\text{. »}}$

   (b) $\boxed{B : \text{« } \forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad P(f,g) \text{ »}}$

   (c) $\boxed{C : \text{« } \exists (f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\quad P(f,g)\text{. »}}$

   (d) $\boxed{D : \text{« } \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad P(f,g)\text{. »}}$

3. Leurs négations sont alors données par

   (a) $\boxed{\overline{A} : \text{« } \exists (f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\quad \overline{P(f,g)}\text{. »}}$

   (b) $\boxed{\overline{B} : \text{« } \exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad \overline{P(f,g)} \text{ »}}$

   (c) $\boxed{\overline{C} : \text{« } \forall (f,g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2,\quad \overline{P(f,g)}\text{. »}}$

   (d) $\boxed{\overline{D} : \text{« } \forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad \overline{P(f,g)}\text{. »}}$

4. On a les implications suivantes

$$\boxed{A \Rightarrow D \Rightarrow B \Rightarrow C.}$$

En effet, si A est vraie, toutes les fonctions commutent avec toutes les autres alors n'importe laquelle commute avec les autres, en en fixant une, on obtient l'assertion D.

Si D est vraie alors une fonction f_0 (fixée et indépendante de quoi que ce soit) commute avec toutes les fonctions, alors chaque fonction va commuter avec f_0 et donc C est vraie. *Attention, la réciproque est fausse a priori car si pour chaque f, on peut construire une fonction g_f adaptée à f qui commute avec f cela ne signifie pas qu'une seule et même fonction va commuter avec toutes les fonctions f.*

Si C est vraie alors chaque fonction va commuter avec une autre fonction. Donc en en fixant une, on peut en trouver une autre qui commute avec et donc globalement construire un couple qui commute.

5. (a) Pour démontrer une existence il nous faut ou utiliser un théorème le garantissant ou en préciser un exemple. Prenons ici un exemple et fixons $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors montrons que pour tout $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ g(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(g(x)) = g(x) = g(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x)) = g \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Or g est quelconque donc

$$\forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}},$$

autrement dit,

$$\forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad P(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, g).$$

Ainsi,

$$\exists f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad P(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, g).$$

Conclusion,

$$\boxed{D \text{ est vraie.}}$$

(b) On a montré dans la question précédente qu'au moins une fonction permutait avec toutes les fonctions i.e. qu'il existe $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \neq \emptyset.}$$

Plus précisément, nous avons même établi

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \qquad \text{i.e.} \qquad \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\} \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

(c) Puisque D est vraie et que, par la question précédente $D \Rightarrow B \Rightarrow C$, on en déduit que

$$\boxed{B \text{ et } C \text{ sont vraies.}}$$

6. (a) Montrons que A est fausse i.e. que $\overline{A}$ est vraie ou encore qu'il existe deux fonctions f et g qui ne commutent pas entre elles. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ la fonction constante égale à 0 et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ la fonction constante égale à 1. Alors, pour $x = 0$ par exemple, on a

$$f(g(0)) = f(1) = 0.$$

Or

$$g(f(0)) = g(0) = 1.$$

Donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$ ceci étant vrai en au moins un point, on en déduit que $f \circ g \neq g \circ f$ ou encore que $\overline{P(f, g)}$ est vraie. Conclusion, $\overline{A}$ est vraie et donc

$$\boxed{A \text{ est fausse.}}$$

(b) Puisque A est fausse, on en déduit que toutes les fonctions f ne sont pas dans $\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ i.e.

$$\boxed{\mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \neq \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'implication suivante :

$$f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

7. La réciproque est donnée par

$$\boxed{f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).}$$

La négation est donnée par

$$\boxed{f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \qquad \text{ET} \qquad f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

La contraposée est donnée par

$$\boxed{f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad f \notin \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).}$$

8. Dans la question 5. on a vu que si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors $f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la réciproque est vraie.}}$$

9. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Supposons que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x_0) = x_0.$$

Posons $g_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_0 \end{array}$. Montrons que f et g_0 ne commutent pas. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. On a

$$f \circ g_0(y) = f(g_0(y)) = f(x_0).$$

D'autre part,

$$g_0 \circ f(y) = g_0(f(y)) = x_0.$$

Donc par définition de x_0, on a

$$f \circ g_0(y) \neq g_0 \circ f(y).$$

Ceci étant vrai en au moins un point, on en déduit que $f \circ g_0 \neq g_0 \circ f$ i.e. f et g_0 ne commutent pas et donc f ne commutent pas avec toutes les fonctions :

$$f \notin \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})).$$

Conclusion, la contraposée est vraie :

$$\boxed{f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad f \notin \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})).}$$

10. On sait que la contraposée est équivalente à l'implication initiale. Donc par la question précédente, on en déduit que l'implication est vraie :

$$f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})) \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

Or par la question 8., nous avons déjà vu que la réciproque est aussi vraie. Conclusion,

$$\boxed{f \in \mathscr{C}(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})) \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$$

11. Conclusion, nous avons démontré l'assertion suivante :

$$\boxed{\exists! f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \circ g = g \circ f.}$$

Exercice II - Complexe

Soit $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2 &= \left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} - \left(2+\sqrt{2}\right) \\
&= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} \\
&= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$z^2 = -2\sqrt{2}\,(1+i)\,.$$

Par suite,

$$z^4 = \left(z^2\right)^2 = \left(-2\sqrt{2}\,(1+i)\right)^2 = 8\,(1+i)^2 = 8\,(1+2i-1) = 16i.$$

Puis,

$$z^8 = \left(z^4\right)^2 = (16i)^2 = -256.$$

Conclusion,

$$\boxed{z^2 = -2\sqrt{2}\,(1+i)\,, \qquad z^4 = 16i, \qquad z^8 = -256.}$$

De plus,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(z^2\right) = \mathrm{Im}\left(z^2\right) = -2\sqrt{2}, \qquad \mathrm{Re}\left(z^4\right) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}\left(z^4\right) = 16, \qquad \mathrm{Re}\left(z^8\right) = -256 \text{ et } \mathrm{Im}\left(z^8\right) = 0.}$$

Exercice III - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 2x^3 - 1 + 2\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie 1 : Etude de g

1. La fonction cube et la fonction constante égale à -1 sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement. Conclusion, le domaine de définition de g est donné par

$$\boxed{I = \mathbb{R}_+^*.}$$

2. L'ensemble de définition de g est bien loin d'être centré en 0 il est donc illusoire d'espérer g paire ou impaire :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. En 0^+, on a $2x^3 \to 0$, $-1 \to -1$ et $2\ln(x) \to -\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.

   En $+\infty$, on a $2x^3 - 1 \to +\infty$ et $2\ln(x) \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

4. La fonction g est dérivable sur son domaine de définition I en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$

   Or pour tout $x > 0$, $6x^2 > 0$ et $\frac{2}{x} > 0$ donc $g(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. De plus, $0 \in]-\infty; +\infty[= g(I)$. Donc par le **corollaire** des valeurs intermédiaires (ou le théorème de la bijection), on en déduit que

$$\boxed{\exists ! \alpha \in I, \quad g(\alpha) = 0.}$$

6. Calculons :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - 1 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 - 2\ln(2) = -\frac{3}{4} - \ln(2) < 0 = g(\alpha).$$

De plus,

$$g(1) = 2 - 1 + 0 = 1 > 0 = g(\alpha).$$

Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$. Donc par la stricte croissance de g, on en déduit que

$$\boxed{\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[.}$$

7. Puisque $\alpha < 1$, par la stricte croissante de la fonction logarithme, on a

$$\boxed{\ln(\alpha) < \ln(1) = 0.}$$

Or $g(\alpha) = 2\alpha^3 - 1 + 2\ln(\alpha) = 0$. Donc

$$\boxed{2\alpha^3 - 1 = -2\ln(\alpha) > 0.}$$

Partie 2 : Etude de f

8. La fonction $x \mapsto 2x$, logarithme et la fonction inverse sont définies, continues et même dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie et dérivable sur } I = \mathbb{R}_+^*}$.

9. Pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} = 2 - \frac{2x^3 - 1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.}$$

10. Or par le tableau de variation de g, on observe que

$$\forall x \in]0; \alpha[, \quad g(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha; +\infty[, \quad g(x) > 0.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que

$$\forall x \in]0; \alpha[, \quad f'(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha; +\infty[, \quad f'(x) > 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Déterminons les limites aux bornes. En 0^+, on a $2x \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty$. Donc par produit $-\frac{\ln(x)}{x^2} \to +\infty$. Ainsi par somme

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

En $+\infty$, on a $\ln(x) \to +\infty$ mais $\frac{1}{x^2} \to 0$. Cependant, par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. D'autre part, $2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion,

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\| +\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

11. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } I}$. A contrario, par la question précédente, on observe que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant \beta$. Conclusion, $\boxed{f \text{ est minorée par } \beta \text{ sur } I}$. La fonction f n'étant pas majorée, a fortiori, $\boxed{f \text{ n'est pas bornée}}$.

12. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant \beta$. Montrons que β est strictement positif. On a

$$\beta = f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}.$$

Or $1 > \alpha > \frac{1}{2}$ donc par la stricte croissance du logarithme,

$$0 > \ln(\alpha) > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < -\ln(\alpha) < \ln(2).$$

Ainsi, $-\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} > 0$ donc

$$\beta > 2\alpha > 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\beta > 1.}$$

13. On commence par noter que $f(1) = 2 - 0 = 2$. On peut donc compléter notre tableau de variation comme suit :

x	0	γ	α	1	$+\infty$
f	$\|\| +\infty$	2	β	2	$+\infty$

Ainsi, on en déduit que

(a) $\boxed{f(]0;1[) = [\beta; +\infty[.}$

(b) $\boxed{f([\alpha; +\infty[) = [\beta; +\infty[.}$

(c) $\boxed{f^{\leftarrow}(]0; +\infty[) = I = \mathbb{R}_+^*}$ car $\beta > 0$.

(d) $\boxed{f^{\leftarrow}([2; +\infty[) =]0; \gamma] \cup [1; +\infty[}$

14. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Puis,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{\ln(x)}{x^3}.$$

Par croissance comparée, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Ensuite, toujours par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x^2} = 0.$$

Conclusion,

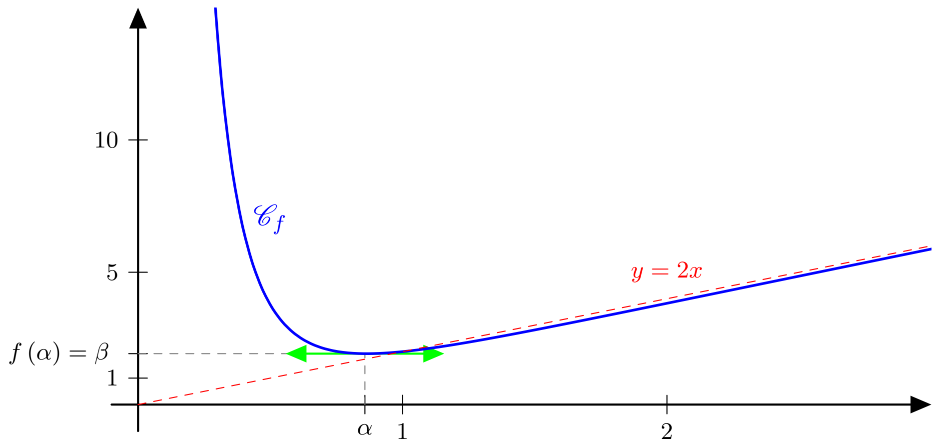
$$\boxed{\text{la droite } y = 2x \text{ est asymptote oblique à la courbe représentative de } f.}$$

15. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) - 2x = -\frac{\ln(x)}{x^2}$. Pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$. Ainsi,

$$\forall x > 1, \quad f(x) - 2x < 0.$$

Conclusion, $\boxed{\text{sur } [1; +\infty[\text{, le graphe de } f \text{ est en-dessous de son asymptote } y = 2x}$.

16. Par les questions précédentes :



Exercice IV - Rechercher (facultatif)

Analyse. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

(1) $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x)) = x + 1$$
(2) $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x) - 1) = 1 - x.$$

Par (1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x)) - 1 = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f(x)$. Alors, $f(y) - 1 = x$. Donc $f(f(y) - 1) = x$. Or par (2), on a aussi $f(f(y) - 1) = 1 - y$. Ainsi,

$$1 - y = x \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - f(x) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = 1 - x.$$

Nous avons pris $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - x.$$

Ce qui achève notre analyse : si jamais f est une solution, nécessairement $f : x \mapsto 1-x$. Nous avons donc au plus une solution.

Synthèse. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x \end{array}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\left(f(x)\right) = f\left(1-x\right) = 1-(1-x) = x.$$

En particulier, $f\left(f(0)\right) = 0 \neq 1 = 1+0$. Donc (1) n'est pas vérifiée en 0 par exemple. Donc f n'est pas solution.
Conclusion,

$$\boxed{\text{Aucune fonction } f \text{ ne vérifie les équations (1) et (2).}}$$