Devoir Maison 2
Fonctions réelles & Trigonométrie

A faire pour le vendredi 1 octobre

Exercice I - Fonction réelle

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Déterminer les limites de f aux bords de I.

   On pourra commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant.
4. Déterminer le tableau de variations complet de f.
5. Montrer que f définit une bijection de I dans J, où J est un intervalle que l'on déterminera. On note $g = f^{-1}$ sa réciproque.
6. Justifier que g est dérivable et pour tout $y \in J$, exprimer $g'(y)$ en fonction de $\mathrm{e}^{g(y)}$ et $\mathrm{e}^{-g(y)}$.
7. Soit $(X, y) \in \mathbb{R}_+^* \times J$. Montrer que
$$\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y \Leftrightarrow X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$
8. En déduire $g(y)$ pour tout $y \in J$.
9. Déterminer g' par deux méthodes.

Exercice II - Trigonométrie

Partie 1 : Etude de fonctions

On considère les fonctions
$$f : x \mapsto \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f et $\mathcal{D}_g$ celui de g.
2. Déterminer la parité de f et celle de g.
3. Montrer que f et g sont périodiques.

On pose $U = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. (a) Résoudre sur U l'inéquation $2 + \frac{1}{\cos(x)} \geqslant 0$.
   (b) En déduire le tableau de signe de f sur U.
   (c) En déduire l'ensemble des réels $x \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $f(x) \geqslant 0$.

On pose $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $I^* = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$F(x) = f(x) - x \qquad \text{et} \qquad G(x) = g(x) - x.$$

5. (a) Pour tout $X \in \mathbb{R}$, développer $(X-1)^2(2X+1)$.
   (b) En déduire une expression factorisée de F' sur I.
   (c) Déterminer le tableau de variations de F sur I.
   (d) En déduire que pour tout $x \in I^*$, $F(x) > 0$.

6. Procéder de même pour montrer que pour tout $x \in I^*$, $G(x) < 0$.

Partie 2 : Etude d'une suite

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

Définition II.1

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

L'objectif de cette partie est de déterminer un équivalent simple de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. (a) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
   (b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in]0;1[$ et $b_n \in]0;1[$.

9. A l'aide des questions 5.d et 6., montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{9}{2+b_n} < \frac{\pi}{2^n a_n} < 2 + \frac{1}{b_n}.$$

10. En déduire que $\left(\frac{\pi}{2^n a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

11. En déduire un équivalent de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 3 : Trigonométrie

12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(3x) = 3\sin(x)\frac{4\cos^2(x)-1}{4\cos^3(x)-3\cos(x)+2}$.

13. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \leqslant -\sqrt{3}$.

14. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\frac{a_k + a_{k+1}}{b_k + b_{k+1}} = \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right).$$

Exercice III - Rechercher (facultatif)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+(n-1)b) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$