Corrigé du Devoir Maison 2
Fonctions réelles & Trigonométrie

Exercice I - Fonction réelle

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^x + e^{-x} \neq 0.$$

Or $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$. Conclusion,

$$\boxed{I = \mathbb{R}.}$$

2. On note que par la question précédente, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. On commence par observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Or $1 - e^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + e^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.}$$

On procède de même en $-\infty$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Or $e^{2x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.}$$

On pouvait aussi raisonner par parité. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, *par l'imparité de* f, *on en déduit directement que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)' \left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right) \left(e^x + e^{-x}\right)'}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left(e^{-x} + e^x\right)^2} \\
&= \frac{4}{\left(e^{-x} + e^x\right)^2}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a$\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} > 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc à l'aide de la question précédente, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	1

5. On a les assertions suivantes :
   - La fonction f est strictement croissante sur **l'intervalle** $I = \mathbb{R}$,
   - La fonction f est continue sur $I = \mathbb{R}$.

   Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f \text{ définit une bijection de } I \text{ dans } J = f(I)}$. On note $g = f^{-1}$. De plus,
   - $\boxed{J = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[=]-1;1[}$, par la question 3.,
   - g est continue sur J,
   - g est strictement croissante sur J.

6. On a déjà montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\forall x \in I = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2} \neq 0.$$

   Donc par le théorème de la dérivée, on en déduit que $\boxed{g \text{ est dérivable sur } J}$ et

$$\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{4}{\left(\mathrm{e}^{g(y)} + \mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{\left(\mathrm{e}^{g(y)} + \mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}{4}.}$$

7. Soit $(X, y) \in \mathbb{R}_+^* \times J$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = y && \text{car } X > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad X^2 - 1 = y\left(X^2 + 1\right) && \text{car } X^2 + 1 \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad X^2 (1 - y) = y + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad X^2 = \frac{1 + y}{1 - y} && \text{car } 1 - y \neq 0 \text{ car } y \neq 1 \text{ car } y \in J.
\end{aligned}$$

De plus pour tout $y \in J$, $1-y>0$ et $y+1>0$ donc $\frac{1+y}{1-y}>0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}}=y \qquad &\Leftrightarrow \qquad \sqrt{X^2}=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow \qquad |X|=X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad\qquad \text{car } X>0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}}=y \;\Leftrightarrow\; X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.}$$

8. Soit $(x,y)\in I\times J$. On a les équivalences suivantes :

$$x=g(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad y=f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Posons $X=\mathrm{e}^x$, alors $X\in\mathbb{R}_+^*$ et

$$x=g(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad y=\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}}.$$

Par la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}
x=g(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad X=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x=\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow \qquad x=\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \qquad\qquad \text{car } \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}>0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y\in J, \qquad g(y)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

9. **Méthode 1.** Puisque pour tout $y\in J$, $1+y>0$ et $1-y>0$, on en déduit de la question précédente que

$$\forall y\in J, \qquad g(y)=\frac{1}{2}\ln(1+y)-\frac{1}{2}\ln(1-y).$$

La fonction g est dérivable sur son domaine de définition donc sur J en tant que différence de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall y\in J, \qquad g'(y)=\frac{1}{2(1+y)}-\frac{-1}{2(1-y)}=\frac{1-y+1+y}{2(1+y)(1-y)}=\frac{2}{2(1-y^2)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y\in J, \qquad g'(y)=\frac{1}{1-y^2}.}$$

Méthode 2. On sait par la question 6. que

$$\forall y\in J, \qquad g'(y)=\frac{\left(\mathrm{e}^{g(y)}+\mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}{4}.$$

Or par la question précédente, pour tout $y \in J$, $g(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall y \in J, \qquad g'(y) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)} + \mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1+y}{1-y} + 2\sqrt{\frac{1+y}{1-y}\frac{1-y}{1+y}} + \frac{1-y}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+y)^2 + (1-y)^2}{(1-y)(1+y)} + 2\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1+2y+y^2+1-2y+y^2+2-2y^2}{1-y^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{4}{1-y^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

Exercice II - Trigonométrie

Partie 1 : Etude de fonctions

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

1. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction tangente sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc par somme, on a

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant -1$ donc $2 + \cos(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}.}$$

2. On a les assertions suivantes :

- L'ensemble $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = \frac{2\sin(-x) + \tan(-x)}{3} = \frac{-2\sin(x) - \tan(x)}{3} \qquad \text{par imparité de sinus et tangente.}$$

Donc pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

De même,

- L'ensemble $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ est centré en 0.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_g$,

$$g(-x) = \frac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad \text{par imparité de sinus et parité du cosinus.}$$

Donc pour tout $x \in \mathscr{D}_g$,

$$g(-x) = -g(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est impaire.}}$$

3. La fonction tangente est π-périodique et donc notamment 2π périodique. De plus la fonction sinus est aussi 2π-périodique. Dès lors, on a les assertions suivantes :

- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $x + 2\pi \in \mathscr{D}_f$.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{2\sin(x+2\pi) + \tan(x+2\pi)}{3} \\ &= \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} \qquad \text{par } 2\pi \text{ périodicité de sinus et tangente.} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

De même,

- Pour tout $x \in \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, on a $x + 2\pi \in \mathscr{D}_g$.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_g$,

$$g(x+2\pi) = \frac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = (x+2\pi) \qquad \text{par } 2\pi \text{ périodicité de sinus et cosinus.}$$

Donc pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x+2\pi) = f(x)$.

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

On pose $U = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. (a) On commence par noter que pour tout $x \in U$, $\cos(x) \neq 0$ donc l'inéquation a un sens sur U. Soit $x \in U$, on a l'équivalence suivante :

$$2 + \frac{1}{\cos(x)} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\cos(x)} \geqslant -2$$

Premier cas, si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, $\cos(x) > 0$ et donc $\frac{1}{\cos(x)} > 0 \geqslant -2$ et l'inéquation est donc vraie dans ce cas.

Second cas, si $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Alors, $\cos(x)<0$ et donc

$$2+\frac{1}{\cos(x)} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0>\frac{1}{\cos(x)} \geqslant -2$$

Par la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient,

$$2+\frac{1}{\cos(x)} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) \leqslant -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].$$

Conclusion, sur U l'ensemble solution de l'inéquation est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].}$$

(b) On note que $U \subseteq \mathscr{D}_f$. Soit $x \in U$. On a

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2\sin(x)+\tan(x)}{3} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin(x)}{3}\left(2+\frac{1}{\cos(x)}\right) \geqslant 0.$$

Or pour $x=0$ et $x=\pi$, on a $\sin(x)=0$ et pour tout $x \in U \setminus \{0;\pi\}$, $\sin(x)>0$. Dès lors, pour $x=0$ et $x=\pi$, $f(x)=0$ et pour $x \in U \setminus \{0;\pi\}$, on a

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2+\frac{1}{\cos(x)} \geqslant 0.$$

Donc par la question précédente, pour $x \in U \setminus \{0;\pi\}$,

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[.$$

Conclusion, globalement,

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].$$

De plus, $f(0)=0=f(\pi)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{3}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}}{3}=0$. Conclusion, on obtient le tableau de signe suivant

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0

(c) Puisque la fonction f est impaire, par la question précédente, on en déduit que

$$\forall x \in \left[-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2};0\right], \qquad f(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) \geqslant 0.$$

En rassemblant avec la question précédente, on obtient que pour tout $x \in]-\pi;\pi]$,

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].$$

Finalement, par 2π périodicité, on conclut que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\boxed{f(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup \left[2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\pi+2k\pi\right]\right).}$$

On pose $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $I^* = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$F(x) = f(x) - x \qquad \text{et} \qquad G(x) = g(x) - x.$$

5. (a) Pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a

$$(X-1)^2(2X+1) = \left(X^2 - 2X + 1\right)(2X+1) = 2X^3 + X^2 - 4X^2 - 2X + 2X + 1 = 2X^3 - 2X^2 + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{(X-1)^2(2X+1) = 2X^3 - 2X^2 + 1.}$$

développer $(X-1)^2(2X+1)$.

(b) Par la question 1., on sait que f est définie sur I. Donc la fonction F est définie sur I. Puis on en déduit que F est dérivable sur I en tant que différence de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. De plus, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} F'(x) = f'(x) - 1 &= \left(\frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3}\right)' - 1 \\ &= \frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \\ &= \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{3\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Posons $X = \cos(x)$. Dès lors,

$$F'(x) = \frac{2X^3 - 3X^2 + 1}{3X^2}.$$

Donc par la question précédente,

$$F'(x) = \frac{(X-1)^2(2X+1)}{3X^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F'(x) = \frac{(\cos(x)-1)^2(2\cos(x)+1)}{3\cos^2(x)}.}$$

(c) Pour tout $x \in I$, on a $\frac{(\cos(x)-1)^2}{3\cos^2(x)} \geqslant 0$. Donc $F'(x)$ est du signe de $(2\cos(x)+1)$. Soit $x \in I$. On a donc

$$F'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\cos(x) + 1 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Or pour tout $x \in I$, $\cos(x) \geqslant 0 > -\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) \geqslant 0.$$

Donc la fonction F est croissante sur I. De plus,

$$F(0) = f(0) = 0,$$

et

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} F(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} - x = +\infty.$$

Conclusion,

x	0		$\frac{\pi}{2}$
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Montrons que F est strictement croissante sur I en montrant que F' est strictement positive sur I^*. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\cos(x) - 1)^2 (2\cos(x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 1 \;\text{ OU }\; 2\cos(x) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Or pour $x \in I^*$, on a $0 < \cos(x) < 1$. Donc $\cos(x) \neq 1$ et $\cos(x) \neq -\frac{1}{2}$. D'où, $F(x) \neq 0$. Or pour tout $x \in I^* \subseteq I$, $F'(x) \geqslant 0$. Donc

$$\forall x \in I^*, \qquad F'(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction F est strictement croissante sur I^* et par continuité, F est strictement croissante sur I. Or pour tout $x \in I^*$, $x > 0$, donc par la stricte croissante de F,

$$F(x) > F(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\forall x \in I^*, \qquad F(x) > 0.$$

6. La fonction G est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et pour tout $x \in I^*$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 3\frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} - 1 \\ &= \frac{6\cos(x) + 3\cos^2(x) + 3\sin^2(x) - (2+\cos(x))^2}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{6\cos(x) + 3 - \left(4 + 4\cos(x) + 4\cos^2(x)\right)}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{-4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1}{(2+\cos(x))^2}. \end{aligned}$$

Posons $X = \cos(x) \in [0;1]$ car $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Dès lors,

$$G'(x) = \frac{-4X^2 + 2X - 1}{(2+X)^2}.$$

Soit Δ le discriminant associé à $-4X^2 + 2X - 1$. On a $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Donc pour tout $X \in [0;1]$ (et même $\mathbb{R}$ en fait), $-4X^2 + 2X - 1 < 0$. Donc

$$\forall x \in I, \qquad G'(x) < 0.$$

Ainsi la fonction G est strictement décroissante sur I. Donc par la stricte décroissance de G sur I, pour tout $x \in I^*$, on a $0 < x$ et donc

$$G(0) > G(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 > G(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I^*, \qquad G(x) < 0.}$$

Partie 2 : Etude d'une suite

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

Définition II.1

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

L'objectif de cette partie est de déterminer un équivalent simple de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. (a) On a $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\frac{\pi}{3\times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or par continuité de la fonction cosinus, $\lim_{u\to 0}\cos(u) = \cos(0) = 1$. Donc par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 1.$$

Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{1} = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1 et } b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.}$$

(b) De même par continuité de la fonction sinus en 0, $\lim_{u\to 0}\cos(u) = \sin(0) = 0$. Donc par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$$

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $2^n \geqslant 1$ donc

$$0 < \frac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Par propriété des fonctions cosinus et sinus,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad 0 < \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = a_n < 1 \qquad \text{et} \qquad 1 > \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = b_n > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \qquad a_n \in \left]0;1\right[\text{ et } b_n \in \left]0;1\right[.}$$

9. Nous avons vu à la question précédentes, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{\pi}{3\times 2^n} \in \left]0;\frac{\pi}{3}\right] \subseteq I^*.$$

Donc par les questions 5.c et 6., on a

$$\begin{aligned}
G(x_n) < 0 < F(x_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3\sin(x_n)}{2+\cos(x_n)} - x_n < 0 < \frac{2\sin(x_n)+\tan(x_n)}{3} - x_n \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3\sin(x_n)}{2+\cos(x_n)} < x_n < \frac{2\sin(x_n)+\tan(x_n)}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3a_n}{2+b_n} < x_n < \frac{2a_n + \frac{a_n}{b_n}}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3\times 2^n} < \frac{2a_n + \frac{a_n}{b_n}}{3}.
\end{aligned}$$

Or par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Donc

$$\frac{3}{2+b_n} < \frac{\pi}{3 \times 2^n a_n} < \frac{2+\frac{1}{b_n}}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{9}{2+b_n} < \frac{\pi}{2^n a_n} < 2 + \frac{1}{b_n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{9}{2+b_n} < \frac{\pi}{2^n a_n} < 2 + \frac{1}{b_n}.}$$

10. On sait que $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{9}{2+b_n} = \frac{9}{2+1} = 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{b_n} = 2+1 = 3.$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\left(\frac{\pi}{2^n a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^n a_n} = 3.}$$

11. A l'aide de la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{3 \times 2^n}}{a_n} = 1.$$

Conclusion, par la définition de l'équivalence,

$$\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{3 \times 2^n}.}$$

Nous verrons dans le cours que $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. *Donc par composition avec* $u = \frac{\pi}{3 \times 2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, *on retrouve bien le résultat ci-dessus.*

Partie 3 : Trigonométrie

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(3x) = \frac{3\sin(3x)}{2+\cos(3x)}$$

Or en développant, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + \left(2\cos^2(x) - 1\right)\sin(x) \\
&= \sin(x)\left(4\cos^2(x) - 1\right).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$g(3x) = \frac{3\sin(x)\left(4\cos^2(x) - 1\right)}{2 + 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}.$$

Conclusion,

$$g(3x) = \frac{3\sin(x)\left(4\cos^2(x) - 1\right)}{2 + 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(3x) = 3\sin(x)\frac{4\cos^2(x) - 1}{4\cos^3(x) - 3\cos(x) + 2}.}$$

13. Puisque g est définie sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) \leqslant -\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} \leqslant -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) \leqslant -\sqrt{3}\,(2+\cos(x)) \qquad \text{car } 2+\cos(x) \geqslant 2-1 = 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \leqslant -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Déterminons la forme polaire de $3\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$. Posons $a = 3$ et $b = \sqrt{3}$, alors $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g(x) \leqslant -\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2\sqrt{3}}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des réels solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a vu que $b_k > 0$ et $b_{k+1} > 0$. Donc $\frac{a_k + a_{k+1}}{b_k + b_{k+1}}$ existe. De plus, en posant $x_k = \frac{\pi}{3\times 2^k}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a_k + a_{k+1}}{b_k + b_{k+1}} &= \frac{\sin(x_k) + \sin\left(\frac{x_k}{2}\right)}{\cos(x_k) + \cos\left(\frac{x_k}{2}\right)} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x_k + \frac{x_k}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x_k - \frac{x_k}{2}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x_k + \frac{x_k}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x_k - \frac{x_k}{2}}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{3x_k}{4}\right)\cos\left(\frac{x_k}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3x_k}{4}\right)\cos\left(\frac{x_k}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{3x_k}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3x_k}{4}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{3x_k}{4}\right) \qquad \text{car } \cos\left(\frac{3x_k}{4}\right) \neq 0 \text{ car } 0 < \frac{3x_k}{4} < x_k < \frac{\pi}{2} \\ &= \tan\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{3\times 2^k}\right) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_k + a_{k+1}}{b_k + b_{k+1}} = \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right).}$$

Exercice III - Rechercher (facultatif)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$. Procédons par récurrence et posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n): \qquad « \cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+(n-1)b) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}. »$$

Initialisation. Si $n = 1$, alors,

$$\frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} = \cos(a) \qquad \text{car } \sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Posons

$$S_n = \cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+(n-1)b) + \cos(a+nb).$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} + \cos(a+nb) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} + \cos(a+nb) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right) + \sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a+nb)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On linéarise le numérateur :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\frac{\sin\left(\frac{nb}{2}+a+(n-1)\frac{b}{2}\right)+\sin\left(\frac{nb}{2}-a-(n-1)\frac{b}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{b}{2}+a+nb\right)+\sin\left(\frac{b}{2}-a-nb\right)}{2}}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(a+(2n-1)\frac{b}{2}\right) + \sin\left(\frac{b}{2}-a\right) + \sin\left(a+(2n+1)\frac{b}{2}\right) + \sin\left(-a-(2n-1)\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(a+(2n-1)\frac{b}{2}\right) + \sin\left(\frac{b}{2}-a\right) + \sin\left(a+(2n+1)\frac{b}{2}\right) - \sin\left(a+(2n-1)\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{b}{2}-a\right) + \sin\left(a+(2n+1)\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On factorise alors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2\sin\left(\frac{\frac{b}{2}-a+a+(2n+1)\frac{b}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{b}{2}-a-a-(2n+1)\frac{b}{2}}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+2)\frac{b}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{-2a-2n\frac{b}{2}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n+1)\frac{b}{2}\right)\cos\left(a+n\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression recherchée.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \cos(a) + \cos(a+b) + \cdots + \cos(a+(n-1)b) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.}$$