Devoir Maison 3
Complexes & Calculs réels

A faire pour le vendredi 22 octobre

Exercice I - Calculs réels

Partie 1 : Système linéaire

On considère le système

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 2 \\ x+2y+2z &= 1. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.

Partie 2 : Valeurs absolues

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x^2+x-3| - x^2 + 3 \end{array}$.

2. Déterminer α et β les deux racines de x^2+x-3 avec $\alpha < \beta$ et donner un encadrement à 0.5 près de chacune de ces racines.
3. Suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, préciser $f(x)$ sans valeurs absolues.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signe de f.
5. Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$ en fonction de β.

Exercice II - Complexes

Partie 1 : Racines carrées d'un complexe

Soit $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$.

1. Montrer que f_0 n'est pas injective.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ et $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.

2. Déterminer l'ensemble des complexes $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$, avec $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$, vérifiant $\omega^2 = z$.
3. En déduire que f_0 est surjective. *Attention, un cas particulier se cache dans cette question...*

Partie 2 : Une bijection complexe

Soient

$$E = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \} \qquad \text{et} \qquad F = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

On considère également f la restriction de f_0 à E et F :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

4. (a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $z = \alpha + i\beta \in E$. Montrer que $f_0(z) \in F$.
   (b) En déduire que f est bien définie.
   (c) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + iy \in F$. Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha + i\beta) = x + iy$ et exprimer α et β en fonction de x et y.
   (d) En déduire que f est bijective et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + iy \in F$, préciser la forme algébrique de $f^{-1}(x + iy)$.

5. (a) Donner sans démonstration I et J deux intervalles inclus dans $[-\pi; \pi[$ pour lesquels
$$E = \left\{ \rho\, \mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \rho > 0 \text{ et } \varphi \in I \right\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ r\, \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C} \;\middle|\; r > 0 \text{ et } \theta \in J \right\}.$$
   (b) En déduire à nouveau que la fonction f est bien définie et même bijective et pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times J$, déterminer la forme polaire de $f^{-1}\left(r\, \mathrm{e}^{i\theta}\right)$.

6. (a) Après avoir justifier son existence, calculer par deux méthodes $f^{-1}(1 + i)$.
   (b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. *On donnera le résultat simplifié : sans radical au dénominateur*
   (c) Vérifier que $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ et calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

7. (a) A l'aide des complexes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4(x)$.
   (b) Simplifier $\sqrt{2\sqrt{2} + 3}$.
   (c) Déduire à nouveau des deux questions précédentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Partie 3 : Etude d'une autre transformation complexe

Dans toute la suite, on fixe un complexe $a \in F$ et on pose $b = f^{-1}(a) \in E$. En particulier, $b^2 = a$ et $b \neq 0$. On considère la fonction
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right). \end{array}$$
et l'ensemble
$$P_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) > 0 \right\}.$$

8. On suppose dans cette question uniquement que $a = 1$.
   (a) Déterminer $g^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer par double inclusion que $g(\mathbb{U}) = [-1; 1]$.

9. On suppose dans cette question uniquement que $a = 2i$. Vérifier que $P_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y > 0\}$ et en donner une représentation graphique.

On revient au cas général où a est quelconque dans F.

10. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, alors $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.

11. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{b} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, alors $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right) > 0$.

12. Justifier que $P_+ \subseteq \mathbb{C}^*$ puis montrer que $g(P_+) \subseteq P_+$.

Partie 4 : Etude d'une suite complexe

On définit la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$z_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = g\left(z_n\right).$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n existe et $z_n \in P_+$.
14. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est bien définie.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2$.
16. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de n et w_0.
17. On admet que si $q \in \mathbb{C}$ vérifie $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{2^n} = 0$. Montrer que $|w_0| < 1$ et en déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
18. En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III - Rechercher (facultatif)

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Déterminer $\max_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-1}{\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1}\right|^2$, puis pour $a \in \mathbb{U}$, en déduire $\max_{z\in\mathbb{U}} \left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right|$.