Corrigé du Devoir Maison 3
Complexes & Calculs réels

Exercice I - Calculs réels

Partie 1 : Système linéaire

On considère le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 2 \\ x+2y+2z &= 1. \end{cases}$$

1. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ -y-z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y+z &= 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_2 = -L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y &= -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z+z &= 1 \\ y &= -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -z \end{cases}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.}$$

Partie 2 : Valeurs absolues

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x^2+x-3| - x^2 + 3 \end{array}$.

2. Soit Δ le discriminant de x^2+x-3. On a $\Delta = 1+12 = 13 > 0$. Donc les deux racines sont

$$\alpha = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

On note que $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$. Ainsi,

$$\frac{-1-4}{2} = -\frac{5}{2} < \alpha < \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad \frac{-1+3}{2} = 1 < \beta < \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\alpha = -\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{13}-2}{2}, \qquad -\frac{5}{2} < \alpha < -2 \qquad \text{et} \qquad 1 < \beta < \frac{3}{2}.}$$

3. Puisque le signe du trinôme est celui du coefficient devant x^2 à l'extérieur des racines, on a

$$\forall x \in \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[, \qquad x^2+x-3 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [\alpha;\beta], \qquad x^2+x-3 \leqslant 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[$,

$$f(x) = \left|x^2+x-3\right| - x^2+3 = x^2+x-3-x^2+3 = x$$

et pour tout $x \in [\alpha;\beta]$,

$$f(x) = \left|x^2+x-3\right| - x^2+3 = -x^2-x+3-x^2+3 = -2x^2-x+6.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[\\ -2x^2-x+6 \text{ si } x \in [\alpha;\beta]\,. \end{cases}}$$

4. Procédons par disjonction de cas. *Premier cas,* $x \in \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[$. Alors,

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Or $\alpha < 0 < \beta$. Donc $0 \notin \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[$. Donc aucune solution dans ce cas.
Second cas, $x \in [\alpha;\beta]$, alors

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2x^2-x+6=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2+x-6=0.$$

Soit Δ le discriminant associé au trinôme $2x^2+x-6$, on a $\Delta = 1+48 = 49$. Donc les racines associées sont

$$\frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-1-7}{4} = -2.$$

Or $\frac{3}{2} > \beta$ donc $\frac{3}{2} \notin [\alpha;\beta]$ cependant $\alpha < -2 < \beta$. Donc dans ce cas $x=-2$ est une solution.
Conclusion, globalement on trouve que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2.}$$

De plus, pour tout $x \leqslant \alpha$, on a $f(x) = x \leqslant \alpha < 0$ et pour tout $x \geqslant \beta$, on a $f(x) = x \geqslant \beta > 0$. D'autre part, pour tout $x \in\in [\alpha:\beta]$, on a

$$f(x) = -2x^2-x+6,$$

dont les racines sont par ce qui précède, $\frac{3}{2} > 2$ et $-2 \in [\alpha;\beta]$. Donc $f(x) \leqslant 0$ sur l'ensemble $\left(\left]-\infty;-2\right] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right[\right) \cap [\alpha;\beta] = [\alpha;-2]$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $\left[-2;\frac{3}{2}\right] \cap [\alpha;\beta] = [-2;\beta]$. Conclusion, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		-2		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

5. Pour tout $x \in \left]-\infty;\alpha\right] \cup \left[\beta;+\infty\right[$, $f(x) = x$ et donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-2\right]$ et sur $\left[\beta;+\infty\right[$. D'autre part, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$,

$$f(x) = -2x^2-x+6.$$

La fonction f est donc dérivable sur $\left]\alpha;\beta\right[$ et pour tout $x \in \left]\alpha;\beta\right[$,

$$f'(x) = -4x-1.$$

Donc pour $x \in \left]\alpha;\beta\right[$,

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -\frac{1}{4}.$$

Or on a bien $\alpha < -2 < -\frac{1}{4} < 1 < \beta$. Donc f est croissante sur $\left]\alpha;-\frac{1}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{4};\beta\right[$. Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc on obtient que f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{4};\beta\right]$ et croissante sur $[\beta;+\infty[$. Conclusion,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		β		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $f(\beta) = \beta$ et

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 6 = \frac{-1+2+48}{8} = \frac{49}{8}.$$

D'où,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		β		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice II - Complexes

Partie 1 : Racines carrées d'un complexe

Soit $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$.

1. On s'échauffe avec une petite question facile : on observe que

$$f_0(-1) = 1 = f_0(1)$$

et pourtant -1 et 1 sont deux complexes distincts. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ n'est pas injective.}}$$

Soient $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[$ et $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.

2. Soient $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ et $\omega = \rho\, e^{i\varphi}$. On a les équivalences suivantes :

$$\omega^2 = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\rho\, e^{i\varphi}\right)^2 = r\, e^{i\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho^2\, e^{2i\varphi} = r\, e^{i\theta}.$$

Par « unicité » de la forme trigonométrique, on obtient que

$$\begin{aligned}\omega^2 = z \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\rho^2 = r \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2\varphi = \theta + 2k\pi\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\rho = \sqrt{r} & \text{car } \rho > 0 \text{ et } r > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

Or $\theta \in [0; 2\pi[$, donc $0 \leqslant \frac{\theta}{2} < \pi$. Ainsi, pour $k = 0$ on a $\frac{\theta}{2} + k\pi = \frac{\theta}{2} \in [0; \pi[\subseteq [0; 2\pi[$, pour $k = 1$, on a $\frac{\theta}{2} + k\pi = \frac{\theta}{2} + \pi \in [\pi; 2\pi[\subseteq [0; 2\pi[$. Cependant, pour $k \geqslant 2$,

$$\frac{\theta}{2} + k\pi \geqslant 0 + k\pi \geqslant 2\pi$$

et pour $k \leqslant -1$,

$$\frac{\theta}{2} + k\pi < \pi + k\pi \leqslant \pi - \pi = 0.$$

Dès lors, $\frac{\theta}{2} + k\pi \in [0; 2\pi[$ si et seulement si $k = 0$ ou $k = 1$. D'où,

$$\begin{aligned}\omega^2 = z \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\rho = \sqrt{r} \\ \varphi = \frac{\theta}{2}\end{cases} \qquad \text{OU} \qquad \begin{cases}\rho = \sqrt{r} \\ \varphi = \frac{\theta}{2} + \pi\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \omega = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{OU} \qquad \omega = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega^2 = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{OU} \qquad \omega = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Premier cas, $z \neq 0$, alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $z = r\, e^{i\theta}$. Posons $\omega = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$. Alors par la question précédente, on a bien $z = \omega^2 = f_0(\omega)$. Dans ce cas, z admet bien un antécédent.

   Second cas, $z = 0$, alors en posant $\omega = 0$, on observe que $z = \omega^2 = f_0(\omega)$.

   Dans tous les cas, z admet au moins un antécédent par f_0

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; \exists \omega \in \mathbb{C}, \qquad z = f_0(\omega).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ est surjective.}}$$

Partie 2 : Une bijection complexe

Soients

$$E = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \} \qquad \text{et} \qquad F = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

On considère également f la restriction de f_0 à E et F :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

4. (a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $z = \alpha + i\beta \in E$. Par définition de E, on a $\alpha = \mathrm{Re}(z) > 0$. D'autre part,

$$f_0(z) = z^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f_0(z) \in \mathbb{R}_- \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \leqslant 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \leqslant 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{car } \alpha > 0 \\ &\phantom{\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 \leqslant 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \end{cases}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 \leqslant 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible car par hypothèse $\alpha > 0$. Ainsi, $f_0(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_0(z) \in F.}$$

(b) La fonction $z \mapsto z^2$ est bien définie sur $\mathbb{C}$ donc en particulier sur E. Donc pour tout $z \in E$, $f(z)$ existe. De plus, par la question précédente, si $z \in E$, alors

$$f(z) = z^2 = f_0(z) \in F.$$

Donc f va bien de E dans F. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie.}}$$

(c) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + iy \in F$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Notons que dans ce cas $z = \alpha + i\beta \in E$ et donc $f(z)$ existe. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$f(\alpha + i\beta) = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + i\beta)^2 = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = x + iy.$$

Par unicité de l'écriture algébrique d'un complexe,

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = x + iy \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ 2\alpha\beta = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ \beta = \frac{y}{2\alpha} \end{cases} \quad \text{car } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \frac{y^2}{4\alpha^2} = x \\ \beta = \frac{y}{2\alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\alpha^4 - y^2 = 4\alpha^2 x \\ \beta = \frac{y}{2\alpha} \end{cases} \quad \text{car } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\alpha^4 - 4\alpha^2 x - y^2 = 0 \\ \beta = \frac{y}{2\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

Posons $X = \alpha^2 > 0$. Dès lors,

$$4\alpha^4 - 4\alpha^2 x - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4X^2 - 4xX - y^2 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 16x^2 + 16y^2 = 4^2\left(x^2 + y^2\right) \geqslant 0$. Donc la ou les racines associées sont

$$r_1 = \frac{4x + 4\sqrt{x^2 + y^2}}{8} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Or $x^2+y^2 \geqslant x^2$ donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$. Ainsi, $r_2 \leqslant 0 < X$ mais au contraire $r_1 \geqslant 0$. Notons également que

$$\begin{aligned} r_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = -x \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2+y^2 = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x+iy \in \mathbb{R}_-. \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $x+iy \in F$, donc $r_1 \neq 0$ et comme $r_1 \geqslant 0$, on a bien $r_1 > 0$. Par suite,

$$4X^2 - 4xX - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = X = r_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{r_1} \qquad \text{car } r_1 > 0.$$

Finalement, puisque $r_1 \neq 0$,

$$f(\alpha + i\beta) = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{r_1} \\ \beta = \frac{y}{2\sqrt{r_1}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \\ \beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+iy \in F,\ \exists!\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } f(\alpha+i\beta) = x+iy.}$$

De plus,

$$\boxed{f(\alpha+i\beta) = x+iy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \\ \beta = \frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \end{cases}}$$

(d) Soit $z \in F$. Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x+iy$. Par la question précédente, il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha+i\beta) = z$. Posons $\omega = \alpha + i\beta$. Alors, $\omega \in E$ et on a $z = f(\omega)$. Par conséquent tout complexe z admet un antécédent par f. De plus si pour $\omega' \in E$, on a $z = f(\omega')$, alors comme $\omega' \in E$, il existe $(\alpha',\beta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $\omega' = \alpha' + i\beta'$. Donc $z = f(\alpha+i\beta) = f(\alpha'+i\beta')$. Par l'unicité démontrée à la question précédente, on en déduit que $\omega' = \omega$. Donc l'antécédent de z par f est aussi unique.

$$\forall z \in F,\ \exists!\,\omega \in E, \qquad f(\omega) = z.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective.}}$$

De plus, toujours par la question précédente, son unique antécédent est donné par

$$\omega = \alpha + i\beta = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+iy \in F, \qquad f^{-1}(x+iy) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}.}$$

5. (a) Pour que z vérifie $\mathrm{Re}(z) > 0$, il faut que son argument de l'intervalle $[-\pi;\pi[$ appartienne à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\boxed{I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad E = \left\{\rho\,\mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \rho > 0 \text{ et } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right\}.}$$

De même pour que $z \notin \mathbb{R}_-$, il faut que son argument soit différent de $-\pi$:

$$\boxed{J =]-\pi;\pi[\qquad \text{et} \qquad F = \left\{r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C} \;\middle|\; r > 0 \text{ et } \theta \in]-\pi;\pi[\right\}.}$$

(b) Soit $z \in E$, alors il existe $(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. Alors, z^2 existe et

$$z^2 = \rho^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi}.$$

On a $r = \rho^2 > 0$ et puisque $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, alors $\theta = 2\varphi \in]-\pi;\pi[$. Donc $z^2 \in F$. On retrouve bien que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie de } E \text{ dans } F.}$$

Soient $z \in F$ et $\omega \in E$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in J$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi \in I$ tel que $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z = f(\omega) \quad &\Leftrightarrow \quad z = \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad r\,\mathrm{e}^{i\theta} = \left(\rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}\right) = \rho^2\,\mathrm{e}^{2i\varphi} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \rho^2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = 2\varphi + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{r} & \text{car } r > 0 \text{ et } \rho > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Or $\theta \in J =]-\pi;\pi[$ et donc $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[= I$. Or on doit aussi avoir $\varphi \in I$. D'où,

$$z = f(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \varphi = \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Donc tout complexe $z \in F$ admet un unique antécédent dans E. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective.}}$$

De plus,

$$\boxed{\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times J, \qquad f^{-1}\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.}$$

6. (a) On observe que $1 + i \in F$ donc $\boxed{f^{-1}(1+i) \text{ existe}}$. Si $z = 1 + i$, alors $x = \mathrm{Re}(z) = 1$ et

$y = \operatorname{Im}(z) = 1$. Donc par la question 4.d, on a

$$\begin{aligned}
f^{-1}(1+i) &= \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}\\
&= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(2-1\right)}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on observe également que

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc le module de $1+i$ est $r = \sqrt{2}$ et un argument $\theta = \frac{\pi}{4} \in \left]-\pi;\pi\right[$. Donc par la question 5.b, on a

$$f^{-1}(1+i) = f^{-1}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(1+i) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} = \sqrt{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}.}$$

(b) Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\sqrt{\sqrt{2}}} + i\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{\sqrt{2}}}\\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Par unicité de la forme algébrique,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

(c) Calculons,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}=1.$$

Donc on a bien

$$\boxed{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1.}$$

On en déduit également,

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1.$$

Tout ça pour ça... Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1.}$$

7. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Par la formule d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^4(x)&=\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4\\&=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix}+4\,\mathrm{e}^{3ix-ix}+6\,\mathrm{e}^{2ix-2ix}+4\,\mathrm{e}^{ix-3ix}+\mathrm{e}^{-4ix}\right)\\&=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix}+4\,\mathrm{e}^{2ix}+6+4\,\mathrm{e}^{-2ix}+\mathrm{e}^{-4ix}\right)\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ix}+\mathrm{e}^{-4ix}}{2}+4\frac{\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix}}{2}+3\right)\\&=\frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos^4(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.}$$

(b) On a les calculs dans $\mathbb{R}$ suivants :

$$\sqrt{2\sqrt{2}+3}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt{1^2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=1+\sqrt{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2\sqrt{2}+3}=\sqrt{2}+1.}$$

(c) En posant $x=\frac{\pi}{8}$, par la question 7.a, on a

$$\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}.$$

Or $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$, donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=+\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+3}{8}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}{2\sqrt{2}}.$$

Donc par la question précédente,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Puis comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Conclusion, on retrouve bien la valeur du cosinus souhaitée :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

Partie 3 : Etude d'une autre transformation complexe

Dans toute la suite, on fixe un complexe $a \in F$ et on pose $b = f^{-1}(a) \in E$. En particulier, $b^2 = a$. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right). \end{array}$$

et l'ensemble

$$P_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) > 0 \right\}.$$

8. On suppose que $a = 1$.

   (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in g^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad g(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}.$$

   Par caractérisation avec le conjugué, on a

$$\begin{array}{rcll}
z \in g^{\leftarrow}(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} & \\
& \Leftrightarrow & \frac{z^2+1}{z} = \frac{\overline{z}^2+1}{\overline{z}} & \\
& \Leftrightarrow & \overline{z}\left(z^2+1\right) = z\left(\overline{z}^2+1\right) & \text{car } z \neq 0 \text{ et donc aussi } \overline{z} \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & |z|^2 z + \overline{z} = \overline{z}\,|z|^2 + z & \\
& \Leftrightarrow & |z|^2(z - \overline{z}) = z - \overline{z} & \\
& \Leftrightarrow & \left(|z|^2 - 1\right)(z - \overline{z}) = 0 & \\
& \Leftrightarrow & |z|^2 = 1 \quad \text{OU} \quad z = \overline{z} & \\
& \Leftrightarrow & |z| = 1 \quad \text{OU} \quad z \in \mathbb{R} & \\
& \Leftrightarrow & z \in \mathbb{U} \quad \text{OU} \quad z \in \mathbb{R}^* & \text{car } z \neq 0.
\end{array}$$

   Conclusion,

$$\boxed{g^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*.}$$

   (b) Montrons que $g(\mathbb{U}) = [-1; 1]$. Procédons par double inclusion. Montrons que $g(\mathbb{U}) \subseteq [-1; 1]$. Soit $z \in g(\mathbb{U})$, donc il existe $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $z = g(\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, on sait que $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$. Donc

$$z = \frac{\omega + \overline{\omega}}{2} = \mathrm{Re}(\omega).$$

Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = e^{i\theta}$. Donc

$$z = \mathrm{Re}\,(\omega) = \cos(\theta) \in [-1;1]\,.$$

Ainsi, $g(\mathbb{U}) \subseteq [-1;1]$. Montrons l'inclusion réciproque : $[-1;1] \subseteq g(\mathbb{U})$. Soit $x \in [-1;1]$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. Posons $y = \sin(\theta)$ et $\omega = x + iy = e^{i\theta}$. Dès lors, $\omega \in \mathbb{U}$ donc $\omega \neq 0$ et donc $g(\omega)$ existe et comme vu précédemment,

$$g(\omega) = \mathrm{Re}\,(\omega) = \cos(\theta) = x.$$

Donc il existe $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $x = g(\omega)$. Donc $x \in g(\mathbb{U})$. Ainsi, $[-1;1] \subseteq g(\mathbb{U})$. Par double inclusion, on en conclut que

$$\boxed{g(\mathbb{U}) = [-1;1]\,.}$$

9. On suppose que $a = 2i = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}} \in F$. Donc par la question 5.b,

$$b = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in P_+ \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{1+i}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z(1-i)}{2}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Re}\,(iz) > 0. \end{aligned}$$

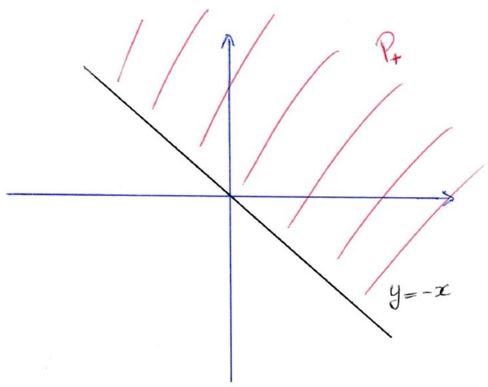
Posons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Alors,

$$z \in P_+ \quad \Leftrightarrow \quad x - \mathrm{Re}\,(ix - y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y > 0\}\,.}$$

Donc pour que $z = x + iy$ soit dans P_+ il faut et il suffit que $y > -x$ autrement dit cela correspond à au demi-plan (strict) des points M qui sont strictement au-dessus de la droite $y = -x$:



On revient au cas général où a est quelconque dans F.

10. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

Méthode 1. Puisque $z \notin i\mathbb{R}$, en particulier, $z \neq 0$. Posons $r = |z| > 0$ et θ l'argument de z dans $]-\pi;\pi]$. Puisque $z \notin i\mathbb{R}$, $\theta \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Puis,

$$\mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}}\right) = r\cos(\theta)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\,\theta}}{r}\right) = r\cos(\theta)\,\frac{1}{r}\cos(-\theta) = \cos^2(\theta)\,.$$

Puisque $\theta \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$, on en déduit que $\cos(\theta) \neq 0$ et donc $\cos^2(\theta) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0.}$$

Méthode 2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Posons $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Puisque $z \notin i\mathbb{R}$, alors $x \neq 0$. Puis,

$$\mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = x\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = x\mathrm{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = x\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Puisque $x \neq 0$, alors $x^2 > 0$, $x^2 + y^2 > 0$ et donc $\frac{x^2}{x^2+y^2} > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0.}$$

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{b} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Posons $Z = \frac{z}{b}$. Puisque $Z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, par la question précédente,

$$\mathrm{Re}\,(Z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{b}{z}\right) > 0.$$

Or $\frac{b}{z} = \frac{b^2}{bz}$ (car $b \neq 0$) et donc $\frac{b}{z} = \frac{a}{bz}$ car $b^2 = a$. D'où $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \text{tel que } \frac{z}{b} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right) > 0.}$$

12. Montrons que $z \in P_+ \;\Rightarrow\; z \neq 0$. Par contraposée, si $z = 0$, alors $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) = \mathrm{Re}\,(0) = 0$ et donc $z \notin P_+$. Donc $z \in P_+ \;\Rightarrow\; z \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{P_+ \subseteq \mathbb{C}^*.}$$

Soit $\omega \in g\,(P_+)$ (ensemble image qui existe bien car nous venons d'établir que $P_+ \subseteq \mathbb{C}^*$). Par définition, il existe $z \in P_+$ tel que $\omega = g\,(z)$. Puisque $z \in P_+$, $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) > 0$, en particulier, $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) \neq 0$ et donc $\frac{z}{b} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Donc par la question précédente,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right) > 0.$$

Or $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) > 0$, donc $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right) > 0$. D'autre part,

$$\omega = g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right).$$

Donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\omega}{b}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b} + \frac{a}{bz}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{a}{bz}\right)\right) > 0.$$

Donc $\omega \in P_+$. D'où pour tout $\omega \in g\,(P_+)$, on a $\omega \in P_+$. Conclusion,

$$\boxed{g\,(P_+) \subseteq P_+.}$$

Partie 4 : Etude d'une suite complexe

On définit la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$z_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = g(z_n).$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$.

13. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « z_n existe et $z_n \in P_+$ ». Procédons par récurrence.

    Initialisation. Si $n = 0$, alors $z_0 = a$ existe bien. Montrons que $a \in P_+$. On a

    $$\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{b^2}{b}\right) = \mathrm{Re}(b) > 0 \qquad\qquad \text{car } b \in E.$$

    Donc $z_0 = a \in P_+$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. z_n existe et $z_n \in P_+$. Puisque $z_n \in P_+$ et que $P_+ \subseteq \mathbb{C}^*$ (l'ensemble de définition de g), alors $z_{n+1} = g(z_n)$ existe. De plus, on a vu que comme $z_n \in P_+$, alors $z_{n+1} = g(z_n) \in g(P_+)$. Or par la question 12. $g(P_+) \subseteq P_+$ donc $z_{n+1} \in P_+$ ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.

    Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n \text{ existe et } z_n \in P_+.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $z_n \in P_+$ i.e. $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{b}\right) > 0$. Donc

    $$\mathrm{Re}\left(\frac{z_n + b}{b}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{b}\right) + 1 > 1.$$

    En particulier $\frac{z_n+b}{b} \neq 0$ et donc $z_n + b \neq 0$ et finalement $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ existe. Conclusion,

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \text{ est bien définie.}}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes dans $\mathbb{C}$,

    $$\begin{aligned} w_{n+1} = \frac{z_{n+1} - b}{z_{n+1} + b} &= \frac{g(z_n) - b}{g(z_n) + b} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right) - b}{\frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right) + b} \\ &= \frac{z_n^2 + a - 2bz_n}{z_n^2 + a + 2bz_n} \\ &= \frac{z_n^2 - 2bz_n + b^2}{z_n^2 + 2bz_n + b^2} \qquad\qquad \text{car } a = b^2 \\ &= \frac{(z_n - b)^2}{(z_n + b)^2} \\ &= \left(\frac{z_n - b}{z_n + b}\right)^2 \\ &= w_n^2. \end{aligned}$$

    Conclusion,

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} = w_n^2.}$$

16. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $w_n = w_0^{2^n}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$. Alors, $w_0^{2^0} = w_0^1 = w_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par la question précédente, $w_{n+1} = w_n^2$ donc par hypothèse de récurrence,

$$w_{n+1} = \left(w_0^{2^n}\right)^2 = w_0^{2^n \times 2} = w_0^{2^{n+1}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = w_0^{2^n}.}$$

17. Par définition,

$$w_0 = \frac{z_0 - b}{z_0 + b} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{b^2 - b}{b^2 + b} = \frac{b-1}{b+1}.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$|w_0| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{b-1}{b+1}\right| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |b-1| < |b+1|,$$

car $|b+1| \neq 0$ car $b \neq -1$ car $\mathrm{Re}\,(b) > 0$ car $b \in E$. Poursuivons,

$$\begin{aligned}
|w_0| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |b-1|^2 < |b+1|^2 \qquad \text{par la stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+ \\
&\Leftrightarrow \quad |b|^2 - 2\mathrm{Re}\,(b) + 1 < |b|^2 + 2\mathrm{Re}\,(b) + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4\mathrm{Re}\,(b) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(b) > 0.
\end{aligned}$$

Or $b \in E$. Donc la dernière assertion est vraie. Par équivalences, on en déduit bien que

$$\boxed{|w_0| < 1.}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} w_0^{2^n} = 0.}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$. Donc

$$(z_n + b)\, w_n = z_n - b \qquad \Rightarrow \qquad z_n\,(w_n - 1) = -b\,(1 + w_n)\,.$$

Or, par la question précédente, $|w_0| < 1$. Donc $|w_n| = \left|w_0^{2^n}\right| = |w_0|^{2^n} < 1$. Nécessairement, $w_n \neq 1$. Ainsi,

$$z_n = -b\frac{1 + w_n}{w_n - 1} = b\frac{1 + w_n}{1 - w_n}.$$

Or $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} b\frac{1 + w_n}{1 - w_n} = b\frac{1+0}{1-0} = b.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} z_n = b.}$$

Exercice III - Rechercher (facultatif)

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Posons $f : t \mapsto \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-1}{\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1}\right|^2$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f(t) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1\right| \neq 0.$$

Or

$$\left|\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1\right| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda\,\mathrm{e}^{it}-1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda\,\mathrm{e}^{it} = 1.$$

Si $\lambda\,\mathrm{e}^{it} = 1$, alors $1 = \left|\lambda\,\mathrm{e}^{it}\right| = |\lambda|$ et donc cela signifie que $\lambda \in \{-1;1\}$, car $\lambda \in \mathbb{R}$. Or ces cas sont exclus par définition de λ. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1\right| \neq 0$ et la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\left|\mathrm{e}^{it}\right|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\right) + 1}{\left|\lambda\,\mathrm{e}^{it}\right|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\lambda\,\mathrm{e}^{it}\right) + 1} &&= \frac{1 - 2\cos(t) + 1}{|\lambda|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\right) + 1} \qquad \text{par la } \mathbb{R}\text{-linéarité de la partie réelle} \\ &= 2\frac{1-\cos(t)}{|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction cosinus est paire et 2π-périodique, on vérifie aisément que la fonction f est également paire et 2π-périodique. On l'étudie donc grâce à la périodicité sur $[-\pi;\pi]$ puis sur $[0;\pi]$ grâce à la parité. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et donc f est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout $t \in [0;\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\frac{\sin(t)\left(|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)\right) - (1-\cos(t))(2\lambda\sin(t))}{\left(|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)\right)^2} \\ &= 2\frac{\left(|\lambda|^2+1\right)\sin(t) - 2\lambda\cos(t)\sin(t) - 2\lambda\sin(t) + 2\lambda\cos(t)\sin(t)}{\left(|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)\right)^2} \\ &= 2\frac{\left(|\lambda|^2 - 2\lambda + 1\right)\sin(t)}{\left(|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)\right)^2} \\ &= 2\frac{(|\lambda|-1)^2\sin(t)}{\left(|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\cos(t)\right)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in [0;\pi]$

$$f'(t) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(t) \geqslant 0$$

ce qui est vrai sur $[0;\pi]$. Donc la fonction f est croissante sur $[0;\pi]$ et par parité décroissante sur $[-\pi;0]$. De plus, $f(0) = \left|\frac{1-1}{\lambda-1}\right|^2 = 0$ et $f(\pi) = \left|\frac{\mathrm{e}^{i\pi}-1}{\lambda\,\mathrm{e}^{i\pi}-1}\right|^2 = \left|\frac{-1-1}{-\lambda-1}\right|^2 = \frac{4}{(\lambda+1)^2}$. Et par parité, $f(-\pi) = \frac{4}{(\lambda+1)^2}$. D'où le tableau de variation :

x	$-\pi$		0		π
f	$\frac{4}{(\lambda+1)^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{(\lambda+1)^2}$

Ainsi, on observe que f admet un maximum sur $[-\pi;\pi]$ qui vaut $\frac{4}{(\lambda+1)^2}$. Par périodicité on en déduit que ce maximum est un maximum global sur $\mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\max_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-1}{\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1}\right|^2 = \frac{4}{(\lambda+1)^2}.}$$

Soit $a \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{U}$. Puisque $|a| = 1$, $a \neq 0$ et donc

$$\left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| = \left|\frac{\frac{z}{a} - 1}{\lambda\, \frac{z}{a} - 1}\right|.$$

De plus $\left|\frac{z}{a}\right| = \frac{|z|}{|a|} = \frac{1}{1} = 1$ car $z \in \mathbb{U}$ et $a \in \mathbb{U}$. Donc $\frac{z}{a} \in \mathbb{U}$. Donc il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\frac{z}{a} = \mathrm{e}^{it}$. Ainsi,

$$\left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{it} - 1}{\lambda\, \mathrm{e}^{it} - 1}\right|.$$

Or par ce qui précède $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}-1}{\lambda\,\mathrm{e}^{it}-1}\right| \leqslant \frac{4}{(\lambda+1)^2}$. Donc par croissance de la fonction racine carrée,

$$\left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda+1|}.$$

Ceci étant vrai pour $z \in \mathbb{U}$ quelconque, avec $\frac{2}{|\lambda+1|}$ qui est une constante indépendante de z, on en déduit que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda+1|}.$$

Montrons que cette valeur est atteinte pour montrer qu'il s'agit bien d'un maximum (et non seulement d'un majorant). Pour $z = -a$. On a bien $|z| = |-a| = |a| = 1$. Donc $z \in \mathbb{U}$ et

$$\left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| = \left|\frac{-a-a}{-\lambda\, a - a}\right| = \left|\frac{2}{\lambda+1}\right| = \frac{2}{|\lambda+1|}.$$

D'où,

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| \geqslant \frac{2}{|\lambda+1|}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\max_{z \in \mathbb{U}} \left|\frac{z-a}{\lambda\, z - a}\right| = \frac{2}{|\lambda+1|}.}$$