Devoir Maison 4
Calcul algébrique, equations complexes, fonctions usuelles

A faire pour le jeudi 04 décembre

Exercice I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$, on s'intéresse à calculer

$$S(p, n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Partie 1 : Des résultats annexes

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser la valeur de $S(0, n)$ et $S(1, n)$ et $S(2, n)$ pour $n \geqslant 2$.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} S(p, n)$.

Partie 2 : Méthode 1 et conséquences.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant p$, $S(p, n) = \dbinom{n+1}{p+1}$.
4. Retrouver alors le résultat de la question 2.
5. Calculer pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p}$.
6. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$.
   (a) Soit $k \in [\![p; n]\!]$. Exprimer $(k+1)\binom{k}{p}$ en fonction de $\binom{k+1}{p+1}$.
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (k+1) \binom{k}{p}$.

Partie 3 : Méthode 2 par un factoriel décroissant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

On pose également par convention $A_0(x) = 1$. On fixe dans toute cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

7. Calculer $A_5\left(\frac{3}{2}\right)$.
8. Préciser $A_n(-1)$ en fonction de $n!$

9. (a) Préciser pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $A_n(k)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n(k) = n!\binom{k}{n}$
10. (a) Montrer que $A_{n+1}(x) = (x-n)\, A_n(x)$.
    (b) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $A_{n+1}(x) = xA_n(x-1)$.
11. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)\, A_p(x)$.
12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}$.
13. Retrouver alors les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.
14. Soit $p \in [\![0; n]\!]$. Montrer à nouveau que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice II - Complexes

On s'intéresse à résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \qquad z^6 + (2-i)\, z^3 + 2 + 2i = 0.$$

On pose également

$$(F) \qquad z^2 + (2-i)\, z + 2 + 2i = 0.$$

1. Montrer que (F) admet deux solutions z_1 et z_2 et les déterminer.
2. Préciser $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ et vérifier la cohérence de votre résultat.
3. Résoudre (E). On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice III - Complexes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^{2k}.$$

1. Calculer $S_2(1+i)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} S_1(z) \in \mathbb{R}$.
3. Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.
   (a) Vérifier que ω est une racine n-ième de l'unité et préciser le n en question.
   (b) Calculer $S_4(\omega)$.
   (c) En déduire également $S_5(\omega)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer, suivant les valeurs de z, $S_n(z)$.
5. En déduire les solutions de l'équation $S_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on note $r = |z|$.

6. On suppose que $r < 1$.
   (a) A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que $\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right| \leqslant \frac{r^{2n+2}}{1-r^2}$.
   (b) En déduire la limite de $\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right|$ quand n tend vers $+\infty$.
7. On suppose que $r = 1$, que $z \neq 1$ et $z \neq -1$. On pose θ un argument de z.
   (a) Montrer que $S_n\left(z\right) = \mathrm{e}^{in\theta}\, \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}$.
   (b) Retrouver alors les résultats des questions 3.b et 3.c

Exercice IV - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :

$$f\ :\ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x). \end{array}$$

Partie 1 : Premières considérations sur f

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser la parité de f.
3. Calculer $f(0)$, $f\left(1\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f\left(-\sqrt{3}\right)$.
4. Déterminer le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

5. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right).$$
7. (a) Simplifier l'expression de f' sur $]-1; 1[$.
   (b) En déduire une expression simple de f sur $[-1; 1]$.
   On pensera à parler de continuité pour inclure les bornes.
8. Déterminer également une expression simple de f sur $[1; +\infty[$.
9. En déduire une expression simple de f sur $]-\infty; -1]$.
10. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

11. (a) Soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Simplifier $\arcsin\left(\sin\left(\theta\right)\right)$.
    (b) Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Simplifier $\arcsin\left(\sin\left(\theta\right)\right)$.
    (c) Soit $\theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Simplifier $\arcsin\left(\sin\left(\theta\right)\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = 2\arctan\left(x\right)$.

12. Préciser la valeur de x en fonction de θ.
13. Redémontrer la formule de l'angle moitié donnant $\sin\left(\theta\right)$ en fonction de x.
14. Suivant les valeurs de x, retrouver alors une expression simple de $f(x)$.

Partie 4 : Quand le sinus hyperbolique s'en mêle

On considère la fonction

$$g = f \circ \mathrm{sh} \ : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2}\right) - 2\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right). \end{array}$$

15. Montrer que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution a et déterminer a.

16. A l'aide des parties précédentes, déterminer une expression plus simple de g sur $[a; +\infty[$.

17. Justifier que g est dérivable sur $]a; +\infty[$ et montrer que pour tout $x > a$, $g'(x) = -\frac{4}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice V - Rechercher (facultatif)

On reprend les notations de la partie 3 de l'exercice 1. Démontrer par récurrence l'assertion suivante :

$$(\mathscr{N}) \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n\,(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) A_{n-k}(y).$$