Devoir Maison 4
Calcul algébrique, equations complexes, fonctions usuelles

A faire pour le jeudi 02 décembre

Exercice I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$, on s'intéresse à calculer

$$S(p, n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Partie 1 : Des résultats annexes

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \geqslant 2$. Par définition, on a

$$S(0, n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

De plus,

$$S(1, n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Enfin,

$$S(2, n) = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{2!\,(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}.$$

Il est possible de compléter le terme $k = 1$ (en compensant) et de développer, mais nous pouvons aussi faire un glissement d'indice. Comme nous adorons les glissements d'indice, faisons ça.

Posons $\tilde{k} = k - 1$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
S(2, n) &= \sum_{\tilde{k}=1}^{n-1} \frac{(\tilde{k}+1)\,\tilde{k}}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} \\
&= \frac{(n-1)n}{12}(2n - 1 + 3) \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

On vérifie son résultat pour $n = 2$ par exemple :

$$S(2, 2) = \sum_{k=2}^{2} \binom{k}{2} = 1 \qquad \textit{et} \qquad \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \qquad \textit{OK.}$$

Conclusion,

$$\boxed{S(0, n) = n + 1, \qquad S(1, n) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad S(2, n) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.}$$

2. On a les égalités suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

On reconnaît une somme triangulaire dont on intervertit l'ordre de sommation :

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{0\leqslant p\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^p 1^{k-p}.$$

On reconnaît alors pour la somme interne un binôme de Newton :

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{k=0}^{n}(1+1)^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On obtient alors une somme géométrique de raison $2\neq 1$,

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = 2^{n+1}-1.}$$

On vérifie son résultat pour $n=0$, $\sum_{p=0}^{0} S(p,0) = S(0,0) = \sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0} = 1$ et $2^{n+1}-1 = 2^1-1 = 1$ OK.

Partie 2 : Méthode 1 et conséquences.

Soit $p\in\mathbb{N}$.

3. On pose pour tout $n\geqslant p$, $\mathscr{P}(n)$: « $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n=p$, alors

$$S(p,n) = S(p,p) = \sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1.$$

D'autre part,

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1.$$

Donc dans ce cas, $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$ et donc $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant p$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$ autrement dit, on veut montrer que $S(p,n+1) = \binom{n+2}{p+1}$. Calculons, :

$$\begin{aligned} S(p,n+1) = \sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+2}{p+1} && \text{par la formule de Pascal.} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, pour tout $n \geqslant p$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \geqslant p, \quad S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente, puisque dans la somme $p \leqslant n$, on a
$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1}.$$
Posons $q = p+1$,
$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n+1}{q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n+1}{q} 1^q 1^{n+1-q} - \binom{n+1}{0}.$$
On reconnaît alors un binôme de Newton :
$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = (1+1)^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1.$$
On retrouve bien le résultat de la question 2.
$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = 2^{n+1} - 1.}$$

5. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$. Effectuons l'inversion d'indice $\tilde{k} = n - k + p$:
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p} = \sum_{\tilde{k}=p}^{n} \binom{\tilde{k}}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \qquad \text{car l'indice de sommation est muet.}$$
On retrouve alors $S(p,n)$. Donc par la question 3. on conclut que
$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p} = \binom{n+1}{p+1}.}$$

6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$.

   (a) Soit $k \in [\![p;n]\!]$. On a par définition,
$$\begin{aligned}
(k+1)\binom{k}{p} &= (k+1)\frac{k!}{p!\,(k-p)!} \\
&= \frac{(k+1)!}{p!\,(k-p)!} \\
&= \frac{(k+1)!}{\frac{1}{p+1}(p+1)!\,(k-p)!} \\
&= (p+1)\frac{(k+1)!}{(p+1)!\,(k+1-p-1)!} \\
&= (p+1)\binom{k+1}{p+1}.
\end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{k+1}{p+1}.}$$

(b) Par la question précédente,

$$\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\underbrace{(p+1)}_{\text{indépendant de }k}\binom{k+1}{p+1}=(p+1)\sum_{k=p}^{n}\binom{k+1}{p+1}.$$

Posons $\tilde{k}=k+1$:

$$\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p}=(p+1)\sum_{\tilde{k}=p+1}^{n+1}\binom{\tilde{k}}{p+1}=(p+1)\,S\left(p+1,n+1\right).$$

Donc par la question 3.

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p}=(p+1)\binom{n+2}{p+2}.}$$

Partie 3 : Méthode 2 par un factoriel décroissant

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\,.$$

On pose également par convention $A_0(x)=1$. On fixe dans toute cette partie $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$.

7. Par définition,

$$A_5\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)\left(\frac{3}{2}-4\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{45}{32}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A_5\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{45}{32}.}$$

8. On a

$$A_n\left(-1\right)=\prod_{k=0}^{n-1}(-1-k)=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\,.$$

Posons $i=k+1$,

$$A_n\left(-1\right)=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}i=(-1)^n\,n!$$

Conclusion,

$$\boxed{A_n\left(-1\right)=(-1)^n\,n!}$$

9. (a) Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$, on a

$$A_n(k)=\prod_{i=0}^{n-1}(k-i)=\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)\times 0\times\prod_{i=k+1}^{n-1}i=0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in[\![0;n-1]\!],\quad A_n(k)=0.}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. *Premier cas,* $k \in [\![0; n-1]\!]$, alors par la question précédente $A_n(k) = 0$, mais puisque $n > k$ par convention, $\binom{k}{n} = 0$. Dans ce cas,

$$A_n(k) = 0 = \binom{k}{n} k!$$

Second cas, $k \geqslant n$. Alors,

$$A_n(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k-i).$$

Effectuons l'inversion d'indice $j = k - i$,

$$A_n(k) = \prod_{j=k-n+1}^{k} j = \frac{\prod_{j=1}^{k} j}{\prod_{j=1}^{k-n} j} \qquad \text{avec la convention } \prod_{j=1}^{k-n} j = 1 \text{ si } k = n$$

Ainsi,

$$A_n(k) = \frac{k!}{(k-n)!} = n! \frac{k!}{n!\,(k-n)!} = n! \binom{k}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A_n(k) = n! \binom{k}{n}.}$$

10. (a) En extrayant le dernier terme (car $n \geqslant 1$), on a directement :

$$A_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k) = (x-n) \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = (x-k)\, A_n(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{A_{n+1}(x) = (x-n)\, A_n(x).}$$

(b) On commence par extraire cette fois-ci le premier terme (car $n \geqslant 1$) :

$$A_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k) = x \prod_{k=1}^{n} (x-k)$$

Posons $i = k - 1$, on obtient

$$A_{n+1}(x) = x \prod_{i=0}^{n-1} (x-(i+1)) = x \prod_{i=0}^{n-1} (x-1-i) = x A_n(x-1).$$

Conclusion,

$$\boxed{A_{n+1}(x) = x A_n(x-1).}$$

11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par la question 10.b avec $\tilde{x} = x+1$ et $n = p \in \mathbb{N}^*$ *(important!!)* on a

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (x+1)\, A_p(x) - A_{p+1}(x).$$

Par la question 10.a, on obtient

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (x+1)\, A_p(x) - (x-n)\, A_p(x) = (x+1-x+p)\, A_p(x) = (p+1)\, A_p(x).$$

Si $p = 0$, on a

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = A_1(x+1) - A_1(x) = x+1-x = 1 = (0+1)\, A_0(x) \qquad \text{par définition.}$$

Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)\, A_p(x).}$$

12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente avec $x = k$, puisque $p + 1 \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{p+1}(k+1) - A_{p+1}(k)}{p+1} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{n} A_{p+1}(k+1) - A_{p+1}(k).$$

Chic, chic, chic, une somme télescopique !

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{1}{p+1} \left(A_{p+1}(n+1) - A_{p+1}(0) \right).$$

Or $A_{p+1}(0) = \prod_{i=0}^{p} (0 - i) = 0$ (ou encore $0 < p + 1$, donc par la question 9.a $A_{p+1}(0) = 0$). Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}.}$$

13. Prenons $p = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} A_1(k) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{0} (k - i) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{A_2(n+1)}{2} = \frac{\prod_{i=0}^{1} (n+1-i)}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

De même, en prenant $p = 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{1} (k - i) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k.$$

Donc par ce qui précède,

$$\sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

D'autre part, par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \frac{A_3(n+1)}{3} = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{2} (n+1-i)}{3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} \\
\Leftrightarrow \qquad & \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
& \phantom{\sum_{k=0}^{n} k^2} = \frac{n\,(n+1)}{6} \left(2(n-1) + 3\right) \\
& \phantom{\sum_{k=0}^{n} k^2} = \frac{n\,(n+1)}{6} \left(2n + 1\right).
\end{aligned}$$

Comment ne pas s'extasier devant la beauté des maths... Conclusion, on retrouve bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum k = 0^n k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.}$$

14. Soit $p \in [\![0;n]\!]$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $p \neq 0$, par la question 9.b on observe que

$$\binom{k}{p} = \frac{A_p(k)}{p!}.$$

Si $p = 0$, on a $\binom{k}{p} = \binom{k}{0} = 1 = \frac{A_0(k)}{0!} = \frac{A_p(k)}{p!}$ par définition. Donc dans tous les cas,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{k}{p} = \frac{A_p(k)}{p!}.$$

En sommant sur k entre p et n :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \sum_{k=p}^{n} A_p(k).$$

Si $p = 0$, on obtient que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{0!} \sum_{k=0}^{n} A_0(k) = n + 1 = \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Si $p \geqslant 1$, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=0}^{n} A_p(k) - \sum_{k=0}^{p-1} A_p(k) \right).$$

Donc par la question 12. avec $\tilde{n} = n$ d'une part et $\tilde{n} = p - 1$ d'autre part,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \left(\frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1} - \frac{A_{p+1}(p-1+1)}{p+1} \right) = \frac{1}{p!} \left(\frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1} - \frac{A_{p+1}(p)}{p+1} \right).$$

Or $p < p + 1$ donc par la question 9.a $A_{p+1}(p) = 0$. Ainsi, par la question 9.b

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{A_{p+1}(n+1)}{(p+1)!} = \frac{(p+1)!\binom{n+1}{p+1}}{(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Dans tous les cas, on retrouve à nouveau que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.}$$

Exercice II - Complexes

On s'intéresse à résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(E) $$z^6 + (2-i)\, z^3 + 2 + 2i = 0.$$

On pose également

(F) $$z^2 + (2-i)\, z + 2 + 2i = 0.$$

1. Soit Δ le discriminant associé à (F). On a

$$\Delta = (2-i)^2 - 4 \times (2+2i) = 4 - 4i - 1 - 8 - 8i = -5 - 12i.$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta = x + iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -5 - 12i \\ |\delta|^2 = x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = -6 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Posons $\delta = 2 - 3i$. Alors, pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(F) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-2 + i + 2 - 3i}{2} = -i \quad \text{OU} \quad z = \frac{-2 + i - 2 + 3i}{2} = -2 + 2i.$$

Conclusion, (F) admet exactement deux solutions données par

$$\boxed{z_1 = -i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2 + 2i.}$$

2. Par la question précédente,

$$\boxed{z_1 + z_2 = -i - 2 + 2i = -2 + i \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = -i\,(-2 + 2i) = 2 + 2i.}$$

Cela est cohérent avec les coefficients de (F), en notant $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 z_2$, puisque le polynôme $X^2 + (2 - i)\,X + 2 + 2i$ est unitaire, on retrouve bien la formule $X^2 - sX + p$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\omega = z^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad z^6 + (2 - i)\,z^3 + 2 + 2i = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \omega^2 + (2 - i)\,\omega + 2 + 2i = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \omega \ \text{ est solution de } (F).
\end{aligned}$$

Par la question 1.

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \omega = z_1 = -i \quad \text{OU} \quad \omega = z_2 = -2 + 2i \\
& \Leftrightarrow \quad z^3 = -i \quad \text{OU} \quad z^3 = -2 + 2i.
\end{aligned}$$

Or $-i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}^3\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$. Donc les solutions de (E) sont les racines troisièmes de $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ et de $\sqrt{2}^3\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$. Ainsi,

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; 2]\!], \quad z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{2k\pi}{3}} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2k\pi}{3}}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{(E)} &= \left\{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}; \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{6}}; \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}\\
&= \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}; \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&= \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}; i; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; 1+i; (1+i)\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; (1+i)\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&= \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}; i; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; 1+i; \frac{-1+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&= \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}; i; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; 1+i; \frac{-1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{(E)} = \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}; i; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; 1+i; \frac{-1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\right\}.}$$

Vérifions un peu notre résultat, si $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $z^2 = \frac{3-2\sqrt{3}i-1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. *Puis,* $z^3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}-i-3i-\sqrt{3}}{4} = -i$ *et* $z^6 = -1$. *Dès lors,*

$$z^6 + (2-i)\,z^3 + 2 + 2i = -1 + (2-i)\,(-i) + 2 + 2i = -1 - 2i - 1 + 2 + 2i = 0 \qquad \textit{OK.}$$

Si $z = 1+i$, *alors* $z^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$ *et donc* $z^6 = 4 - 8i - 4 = -8i$. *Ainsi*

$$z^6 + (2-i)\,z^3 + 2 + 2i = -8i + (2-i)\,(-2+2i) + 2 + 2i = -8i - 4 + 4i + 2i + 2 + 2 + 2i = 0 \qquad \textit{OK.}$$

Exercice III - Complexes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^{2k}.$$

1. Si $n = 2$ et $z = 1+i$, on obtient

$$S_2(1+i) = (1+i)^0 + (1+i)^2 + (1+i)^4 = 1 + 1 + 2i - 1 + 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -3 + 2i$$

Conclusion,

$$\boxed{S_2(1+i) = -3 + 2i.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{z}S_1(z) \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{z}S_1(z) = \overline{\overline{z}S_1(z)}\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z}\left(1+z^2\right) = z\left(1+\overline{z}^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z} + |z|^2 z = z + |z|^2\,\overline{z}\\
&\Leftrightarrow \quad z\left(|z|^2 - 1\right) = \overline{z}\left(|z|^2 - 1\right)\\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 - 1 \quad \text{OU} \quad z = \overline{z}\\
&\Leftrightarrow \quad |z| = 1 \quad \text{OU} \quad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}.}$$

3. Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

   (a) On observe que
   $$\omega^5 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\omega \text{ est une racine 5-ième de l'unité : } \omega \in \mathbb{U}_5.}$$

   (b) Par définition, on a
   $$S_4(\omega) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 .$$
   Or $\omega \in \mathbb{U}_5$ donc $\omega^5 = 1$ et ainsi, $\omega^6 = \omega^5\,\omega = \omega$ et $\omega^8 = \omega^5\,\omega^3 = \omega^3$. D'où
   $$S_4(\omega) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega + \omega^3 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 .$$
   Or $\omega \in \mathbb{U}_5$ et *(important !)* $\omega \neq 1$. Conclusion,
   $$\boxed{S_4(\omega) = 0.}$$

   (c) Par définition,
   $$S_5(\omega) = \sum_{k=0}^{5} \omega^{2k} = \sum_{k=0}^{4} \omega^{2k} + \omega^{10} = S_4(\omega) + 1 = 0 + 1.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{S_5(\omega) = 1.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On observe que $S_n(z)$ est une suite géométrique de raison z^2.
   Premier cas, $z^2 = 1$ i.e. $z \in \{-1;1\}$. Alors,
   $$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1.$$
   Second cas, $z^2 \neq 1$ i.e. $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1;1\}$. Alors,
   $$S_n(z) = 1 \times \frac{\left(z^2\right)^{n+1} - 1}{z^2 - 1} = \frac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{S_n(z) = \begin{cases} n+1 & \text{si } z \in \{-1;1\} \\ \dfrac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1;1\}\,. \end{cases}}$$

5. On observe que si $z \in \{-1;1\}$, alors $S_n(z) = n + 1 \neq 0$. Donc 1 et -1 ne sont pas solutions. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1;1\}$. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} S_n(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^{2n+2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}_{2n+2} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2n+2}} \;\middle|\; k \in [\![0; 2n+1]\!] \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}} \;\middle|\; k \in [\![0; 2n+1]\!] \right\}. \end{aligned}$$
   On note qu'en prenant $k = 0$, on tombe sur $\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}} = 1$ et si $k = n + 1 \in [\![0; 2n+1]\!]$, on obtient $\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par
   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}} \;\middle|\; k \in [\![1; 2n+1]\!] \setminus \{n+1\} \right\}.}$$

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on note $r = |z|$.

6. On suppose que $r < 1$.

(a) Puisque $r < 1$, on observe que $z \notin \{-1; 1\}$. Donc par la question 4., on

$$\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right| = \left|\frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} - \frac{1}{1-z^2}\right| = \left|\frac{-z^{2n+2}}{1-z^2}\right| = \frac{|z|^{2n+2}}{|1-z^2|} = \frac{r^{2n+2}}{|1-z^2|}.$$

Or par l'inégalité triangulaire inférieure, $|1-z^2| \geqslant 1 - |z^2| = 1 - r^2$. Comme $r < 1$, $1 - r^2 > 0$. Donc par la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient,

$$0 < \frac{1}{|1-z^2|} \leqslant \frac{1}{1-r^2}.$$

Ainsi, en multipliant par $r^{2n+2} \geqslant 0$, on obtient que

$$\frac{r^{2n+2}}{|1-z^2|} \leqslant \frac{r^{2n+2}}{1-r^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right| \leqslant \frac{r^{2n+2}}{1-r^2}.}$$

(b) Puisque $r \in [0; 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{2n+2} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r^{2n+2}}{1-r^2} = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente,

$$0 \leqslant \left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right| \leqslant \frac{r^{2n+2}}{1-r^2}$$

Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left|S_n(z) - \frac{1}{1-z^2}\right| = 0.}$$

On dira alors que la suite complexe $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers le complexe* $\frac{1}{1-z^2}$.

7. On suppose que $r = 1$, que $z \neq 1$ et $z \neq -1$. On pose θ un argument de z.

(a) La forme polaire de z est donnée par $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta} = \mathrm{e}^{i\,\theta}$. Puisque $z \neq 1$ et $z \neq -1$, par la question 4. on obtient que

$$S_n(z) = \frac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1} = \frac{\mathrm{e}^{i\,\theta(2n+2)} - 1}{\mathrm{e}^{2i\,\theta} - 1}.$$

Par la factorisation par l'angle moitié, on obtient alors

$$S_n(z) = \frac{\mathrm{e}^{i\,\theta(n+1)}}{\mathrm{e}^{i\,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{i\,\theta(n+1)} - \mathrm{e}^{-i\,\theta(n+1)}}{\mathrm{e}^{i\,\theta} - \mathrm{e}^{-i\,\theta}} = \mathrm{e}^{in\,\theta} \frac{2i\sin(\theta(n+1))}{2i\sin(\theta)}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n(z) = \mathrm{e}^{in\theta} \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

(b) Avec $\theta = \frac{2\pi}{5}$, on a $\omega = \mathrm{e}^{i\,\theta} \in \mathbb{U} \setminus \{-1; 1\}$. Donc par la question précédente,

$$S_4(\omega) = \mathrm{e}^{i4\theta} \frac{\sin(5\,\theta)}{\sin(\theta)} = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}} \frac{\sin(2\pi)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 0.$$

De même,

$$S_5(\omega) = \mathrm{e}^{i5\theta}\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)} = \mathrm{e}^{i2\pi}\frac{\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 1 \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}+2\pi\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 1.$$

Conclusion, on retrouve bien les résultats des questions 3.b et 3.c :

$$\boxed{S_4(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad S_5(\omega) = 1.}$$

Exercice IV - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x). \end{array}$$

Partie 1 : Premières considérations sur f

1. La fonction arctangente est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsinus sur $[-1;1]$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est définie et continue sur en x si et seulement si

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \quad & \Leftrightarrow \quad -1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2 \geqslant 1 > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 1+x^2+2x \quad \text{ET} \quad 0 \leqslant 1+x^2-2x \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (1+x)^2 \quad \text{ET} \quad 0 \leqslant (x-1)^2. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et même continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(-x) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2\arctan(x) = -f(x),$$

par l'imparité de la fonction arcsinus et celle de la fonction arctan. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. On a

$$f(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(0) = 0.$$

Ce qui est cohérent avec son imparité. Puis,

$$f(1) = \arcsin\left(\frac{2}{1+1}\right) - 2\arctan(1) = \arcsin(1) - 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Aussi,

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{1+3}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Par imparité de f, on a directement,

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = 0, \qquad f(1) = 0, \qquad f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}, \qquad f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.}$$

4. On observe que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$. Donc par continuité de la fonction arcsinus en 0,
$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin(0) = 0.$$
D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\pi}$$
et

$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y=-\pi \text{ au voisinage de } +\infty.}$

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1-x^2 < 2x < 1+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 1+2x+x^2 \quad \text{ET} \quad 0 < 1-2x+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < (1+x)^2 \quad \text{ET} \quad 0 < (x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq -1 \quad \text{ET} \quad x \neq 1.
\end{aligned}$$
La dernière assertion étant vraie par hypothèse, on obtient que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1.$$
Or la fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Donc par composition, $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. De plus la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Conclusion, par somme,
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}.}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. On a les calculs dans $\mathbb{R}$ suivants :
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= 2\frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} - \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
&= 2\frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} - \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right).}$$

7. (a) Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Alors $1-x^2 > 0$. D'où, dans ce cas, par la question précédente,

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{1-x^2} - 1\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f'(x) = 0.}$$

(b) Par la question précédente, puisque $\left]-1;1\right[$ est un intervalle, on en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f(x) = C.$$

Or la fonction f est continue en 1 et -1 donc $f(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} C = C$ et de même $f(-1) = C$ (ou par imparité). D'où

$$\forall x \in [-1;1], \qquad f(x) = C.$$

Or nous avons vu à la question 3. $f(0) = 0$. Donc $C = f(0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [-1;1], \qquad f(x) = 0.}$$

8. Pour tout $x > 1$, $1 - x^2 < 0$. Donc par la question 6., pour tout $x > 1$ on a

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{x^2-1} - 1\right) = \frac{2}{1+x^2}(-1-1) = -\frac{4}{1+x^2}.$$

Or $\left]1;+\infty\right[$ est un intervalle donc

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]1;+\infty\right[, \qquad f(x) = -4\arctan(x) + C.$$

Or pour $x = \sqrt{3} \in \left]1;+\infty\right[$, par la question 3., on a

$$-\frac{\pi}{3} = f\left(\sqrt{3}\right) = -4\arctan\left(\sqrt{3}\right) + C = -4\frac{\pi}{3} + C$$

Donc

$$C = 4\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi.$$

D'où,

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[, \qquad f(x) = \pi - 4\arctan(x).$$

Or on sait aussi que $f(1) = 0$ et $\pi - 4\arctan(1) = \pi - 4\frac{\pi}{4} = 0$. Donc l'égalité reste vraie en 1 (ce qui est cohérent avec le fait que f est continue en 1). Conclusion,

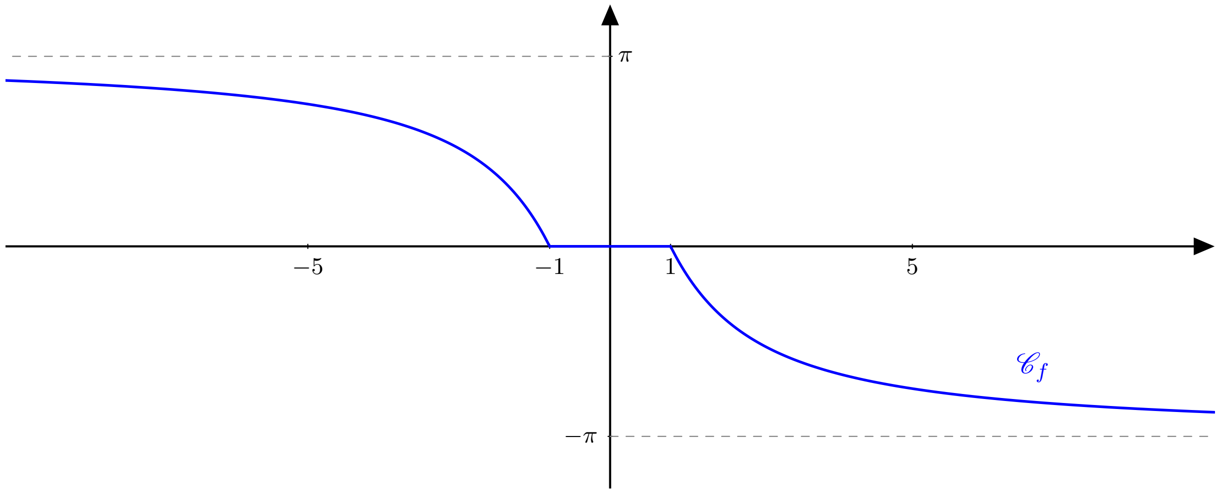
$$\boxed{\forall x \in \left[1;+\infty\right[, \qquad f(x) = \pi - 4\arctan(x).}$$

On note que ce résultat est cohérent avec celui de la question 4. car on retrouve que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi - 4\frac{\pi}{2} = \pi - 2\pi = -\pi.$$

9. On ne recommence pas tout, on invoque plutôt l'imparité de f : pour tout $x \in]-\infty; -1]$, en posant $y = -x$,
$$f(x) = f(-y) = -f(y).$$
Or $y = -x \in [1; +\infty[$, donc par la question précédente,
$$\begin{aligned} f(x) &= -(\pi - 4\arctan(y)) \\ &= -\pi + 4\arctan(-x) \\ &= -\pi - 4\arctan(x) \qquad \text{par imparité de la fonction arctan.} \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in]-\infty; -1], \qquad f(x) = -\pi - 4\arctan(x).}$$

10. On obtient alors le graphe suivant :



Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

11. (a) Soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Alors $\tilde{\theta} = \theta - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Donc $\arcsin\left(\sin\left(\tilde{\theta}\right)\right) = \tilde{\theta}$. Ainsi,
$$\theta - \pi = \tilde{\theta} = \arcsin\left(\sin\left(\tilde{\theta}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\theta - \pi\right)\right).$$
Or $\sin(\theta - \pi) = -\sin(\theta)$. Donc
$$\theta - \pi = \arcsin(-\sin(\theta)) = -\arcsin(\sin(\theta)) \qquad \text{par imparité.}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \qquad \arcsin(\sin(\theta)) = \pi - \theta.}$$

(b) On a directement, par définition de la fonction arcsin,
$$\boxed{\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arcsin(\sin(\theta)) = \theta.}$$

(c) Soit $\theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Posons $\tilde{\theta} = -\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Donc par la question 11.a
$$\arcsin(\sin(-\theta)) = \arcsin\left(\sin\left(\tilde{\theta}\right)\right) = \pi - \tilde{\theta} = \pi + \theta.$$
Par imparité du sinus et de l'arcsinus,
$$-\arcsin(\sin(\theta)) = \pi + \theta.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall \theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right], \qquad \arcsin(\sin(\theta)) = -\pi - \theta.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = 2\arctan(x)$.

12. Par définition, on a $\arctan(x) = \frac{\theta}{2}$. Donc, en composant par la fonction tangente *dans ce sens pas de problème*, on obtient
$$x = \tan(\arctan(x)) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).}$$

13. En développant, on a
$$\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Or $\theta = 2\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ existe. Ainsi,
$$\sin(\theta) = 2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Or on sait que $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Donc
$$\sin(\theta) = 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
Puisque $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on conclut que
$$\boxed{\sin(\theta) = \frac{2x}{1+x^2}.}$$

14. Ainsi, par la question précédente, on observe que
$$f(x) = \arcsin(\sin(\theta)) - \theta.$$
Premier cas, si $x \geqslant 1$, alors $\theta = 2\arctan(x) \in \left[2\frac{\pi}{4};2\frac{\pi}{2}\right[= \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$. Donc par la question 11.a,
$$\arcsin(\sin(\theta)) = \pi - \theta.$$
Ainsi,
$$f(x) = \pi - \theta - \theta = \pi - 2\theta = \pi - 4\arctan(x).$$
Deuxième cas, si $x \in [-1;1]$, alors $\theta = 2\arctan(x) \in \left[-2\frac{\pi}{4};2\frac{\pi}{4}\right] = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Dans ce cas, on sait que $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$. D'où
$$f(x) = \theta - \theta = 0.$$
Troisième cas, si $x \in]-\infty;-1]$, alors $\theta = 2\arctan(x) \in \left]-2\frac{\pi}{2};-2\frac{\pi}{4}\right] = \left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$. Dans ce cas, $\arcsin(\sin(\theta)) = -\pi - \theta$. D'où
$$f(x) = -\pi - \theta - \theta = -\pi - 2\theta = -\pi - 4\arctan(x).$$
Conclusion, on retrouve bien l'expression de f suivante :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \pi - 4\arctan(x) & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ -\pi - 4\arctan(x) & \text{si } x \leqslant -1. \end{cases}}$$

Partie 4 : Quand le sinus hyperbolique s'en mêle

On considère la fonction

$$g = f \circ \mathrm{sh} \ : \quad \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2}\right) - 2\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right). \end{array}$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{sh}(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$. Dès lors,

$$\mathrm{sh}(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - 1 = 2X \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - 2X - 1 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé, on a $\Delta = 4 + 4 = 8$. Donc

$$\mathrm{sh}(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad X = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{OU } X = 1 - \sqrt{2}.$$

Or $X = \mathrm{e}^x > 0$ et $1 - \sqrt{2} < 0$. Donc $X \neq 1 - \sqrt{2}$. Ainsi,

$$\mathrm{sh}(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x = X = 1 + \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Conclusion, l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution a donné par

$$\boxed{a = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).}$$

16. Soit $x \geqslant a$. Alors par croissance de la fonction sh sur $\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}\,(x) \geqslant \mathrm{sh}(a) = 1.$$

Donc $t = \mathrm{sh}(x) \in [1; +\infty[$. Donc par ce qui précède,

$$g(x) = f\left(\mathrm{sh}(x)\right) = f(t) = \pi - 4\arctan(t) = \pi - 4\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [a; +\infty[, \qquad g(x) = \pi - 4\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right).}$$

17. La fonction sh et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]a; +\infty[$. Donc par la question précédente, g est dérivable sur $]a; +\infty[$. *Nous avons dû enlever la valeur de a car la question précédente permet juste d'obtenir la dérivabilité **à droite** de a et nous forcément à gauche et donc globalement en a.* De plus pour tout $x > a$,

$$g'(x) = -4\frac{\mathrm{sh}'(x)}{1 + \mathrm{sh}^2(x)} = -4\frac{\mathrm{ch}(x)}{1 + \mathrm{sh}^2(x)}.$$

Or $1 + \mathrm{sh}^2(x) = 1 + \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4} = \mathrm{ch}^2(x)$. D'où

$$\forall x \in]a; +\infty[, \qquad g'(x) = -4\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = -\frac{4}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in]a; +\infty[, \qquad g'(x) = -\frac{4}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Exercice V - Rechercher (facultatif)

On reprend les notations de la partie 3 de l'exercice 1. Démontrons par récurrence l'assertion suivante :

$$(\mathscr{N}) \qquad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}, \qquad A_n\,(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y).$$

Fixons $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } A_n\,(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y) \text{ »}$$

Initialisation. Si $n=0$, d'une part, par convention, $A_0\,(x+y)=1$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}A_k(x)A_{0-k}(y)=\binom{0}{0}A_0(x)A_0(y)=1.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ aussi. On commence par noter que la question 10.a est vraie y compris si $n=0$:

$$A_{n+1}(x)=A_1(x)=\prod_{k=0}^{0}(x-k)=x=xA_0(x).$$

Donc, quelque soit la valeur de $n\in\mathbb{N}$, par la question 10.a

$$\begin{aligned}
A_{n+1}\,(x+y)&=(x+y-n)\,A_n\,(x+y)\\
&=(x+y-n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y) \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&=(x-k+y-n+k)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-k)\,A_k(x)A_{n-k}(y)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(y-(n-k))\,A_k(x)A_{n-k}(y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{k+1}(x)A_{n-k}(y)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y)
\end{aligned}$$

par la question 10.a (y compris si $k=0$ ou $n-k=0$).

On effectue dans la première somme le glissement d'indice $\tilde{k}=k+1$ i.e. $k=\tilde{k}-1$:

$$\begin{aligned}
A_{n+1}\,(x+y)&=\sum_{\tilde{k}=1}^{n+1}\binom{n}{\tilde{k}-1}A_{\tilde{k}}(x)A_{n-\tilde{k}+1}(y)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y)\\
&=\binom{n}{n}A_{n+1}(x)A_0(y)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A_k(x)A_{n+1-y}(y)\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y)+\binom{n}{0}A_0(x)A_{n+1}(y)\\
&\qquad\qquad \text{car l'indice de sommation est muet}\\
&=\binom{n+1}{n+1}A_{n+1}(x)A_0(y)+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]A_k(x)A_{n+1-y}(y)\\
&\qquad+\binom{n+1}{0}A_0(x)A_{n+1}(y).
\end{aligned}$$

Par la formule de Pascal,

$$\begin{aligned} A_{n+1}\left(x+y\right) &= \binom{n+1}{n+1}A_{n+1}(x)A_0(y) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A_k(x)A_{n+1-y}(y) + \binom{n+1}{0}A_0(x)A_{n+1}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A_k(x)A_{n+1-y}(y). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\qquad A_n\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y).}$$