Devoir Maison 5
Calculs d'intégrales, équations différentielles, matrices

A faire pour le jeudi 06 janvier

Exercice I - Calculs d'intégrales

Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Partie 1 : Les premiers termes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que I_n est bien définie.
2. Calculer I_0.
3. Calculer I_1.
4. Calculer I_2.

Partie 2 : Comportement asymptotique lorsque $a = 1$

On suppose que $a = 1$.

5. Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant 1$.
6. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
7. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Que-peut-on en déduire ?
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x \leqslant 1$.
10. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie 3 : Une autre (vraiment ?) intégrale

On considère l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(t)}{1 + 2\cos^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

11. Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -3\}$. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X+1)(X+3)}$.
12. Justifier que l'intégrale J est bien définie.
13. Effectuer le changement de variable $x = \tan(t)$.
14. En déduire J.

Exercice II - Equations différentielles

Partie 1 : Calculs préliminaires

1. (a) Déterminer trois réels $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{x(1+x^2)} \end{array}$.

2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$.

3. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+x^2}{2}\ln(x) \end{array}$.

Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

4. Justifier sans la calculer l'existence d'une unique fonction y_p solution de (E) et vérifiant $y_p(1) = 0$.
5. Déterminer (E_0) l'équation différentielle homogène associée à (E) puis résoudre (E_0).
   On donnera le résultat sous forme ensembliste et sous forme de Vect.
6. En déduire $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).
7. Déterminer l'unique élément $y_p \in \mathscr{S}_E$ vérifiant $y_p(1) = 0$.

Partie 3 : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

On pose également l'équation homogène associée :

$$(F_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = 0.$$

8. Justifier brièvement pourquoi la résolution de (F) n'est pas une question de cours.
9. *(Question indépendante)* Résoudre l'équation $\left(\tilde{F}\right)$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = 0$.
10. Déterminer l'ensemble des fonctions affines i.e. $z \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ solutions de (F_0).
11. Soient z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $Y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{z(x)}{x} \end{array}$ et $y = Y'$. Montrer que z est une solution de (F) si et seulement si y est une solution de (E).
12. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

Partie 4 : Problème de raccord

On souhaite résoudre l'équation suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1 + x^2.$$

Pour ce faire, on introduit les équations

$$(G_+) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1 + x^2.$$

$$(G_-) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1 + x^2.$$

13. Vérifier que $y_1 : x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ est une solution de (G_+).
14. En déduire $\mathscr{S}_+$ l'ensemble des solutions de (G_+).
15. Soit y_+ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_- : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_+(-x) \end{array}$. Montrer que y_+ est une solution de (G_+) si et seulement si y_- est une solution de (G_-).
16. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}_-$ des solutions de (G_-).
17. Conclure sur $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (G).

Exercice III - Calcul matriciel

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie 1 : Expressions par une suite numérique

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence par

$$u_1 = 0,\ u_2 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Calculer A^2, A^3, A^4 et A^5.
2. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^3 = aA^2 + bA$.
3. En déduire que la matrice A n'est pas inversible.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix}$.
5. Montrer également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A^n = u_nA^2 + 2u_{n-1}A$.

Partie 2 : Les noyaux itérés pour les petits

On identifie $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^3$ (en écrivant les triplets en colonne). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid A^n X = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_1 \subseteq K_n$.
7. Calculer K_1. Ecrire le résultat sous forme ensembliste et de Vect. A quel ensemble géométrique cela correspond-il (point, droite, plan, cercle...) ?
8. Calculer K_2 et vérifier que $K_2 = K_1$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. A l'aide de la question 4. montrer que $K_n = K_{n-1}$.
10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n.

Partie 3 : Les puissances par récurrence

11. On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} - 2u_n.$$

    (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites géométriques dont ont précisera la raison respectivement.
    (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de u_n en fonction de n.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide des questions 4. et 5., calculer de deux façons $\mathrm{Tr}\left(A^n\right)$.
13. Préciser A^7.

Partie 4 : Les puissances par diagonalisation

On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$.

14. Calculer D.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
16. Retrouver alors A^7.